UA RUHR

Algorithmen auf Sequenzen

Exakte Mustersuche: DFAs, KMP-Algorithmus

Sven Rahmann

Genominformatik
Universitätsklinikum Essen
Universität Duisburg-Essen
Universitätsallianz Ruhr

DFAs für die Mustersuche

Problem des NFA: Verwaltung von $\mathcal{O}(m)$ Zuständen pro Schritt
Idee: Äquivalenten DFA konstruieren (nur ein aktiver Zustand)

DFAs für die Mustersuche

Problem des NFA: Verwaltung von $\mathcal{O}(m)$ Zuständen pro Schritt
Idee: Äquivalenten DFA konstruieren (nur ein aktiver Zustand)

Definition

Ein deterministischer endlicher Automat (DFA) ist ein Tupel $(Q, q_0, F, \Sigma, \delta)$, wobei

- Q eine endliche Menge von Zuständen,
- Startzustand $q_0 \in Q$,
- $F \subset Q$ eine Menge von akzeptierenden Zuständen,
- Σ das Eingabealphabet und
- $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ eine deterministische Übergangsfunktion ist.

DFA für die Mustersuche

Funktionsweise:

- Der Automat startet im Zustand q_0 und liest nacheinander Zeichen aus Σ.
- δ ordnet jedem Paar (q, c) **einen** neuen Zustand zu.
- Ist der neue Zustand in F, gibt der Automat das Signal „akzeptiert“.

Bei Transformation von NFA zu DFA mit Teilmengenkonstruktion können aus k Zuständen des NFA bis zu 2^k Zustände des DFA entstehen. Erfreulicherweise ändert sich die Anzahl der Zustände zwischen NFA und DFA bei der exakten Mustersuche **nicht**.

DFA für die Mustersuche

Funktionsweise:

- Der Automat startet im Zustand q_0 und liest nacheinander Zeichen aus Σ.
- δ ordnet jedem Paar (q, c) **einen** neuen Zustand zu.
- Ist der neue Zustand in F, gibt der Automat das Signal „akzeptiert“.

Bei Transformation von NFA zu DFA mit Teilmengenkonstruktion können aus k Zuständen des NFA bis zu 2^k Zustände des DFA entstehen. Erfreulicherweise ändert sich die Anzahl der Zustände zwischen NFA und DFA bei der exakten Mustersuche **nicht**.
Notation: $P[i..j] := P[i : j + 1] = (P[i], \ldots, P[j])$

DFA für die Mustersuche

UA RUHR

Theorem

Sei A die aktive Zustandsmenge des Pattern-Matching-NFA.
Sei $a^* := \max A$. Dann ist A durch a^* eindeutig bestimmt.
Der äquivalente DFA hat genauso viele Zustände wie der NFA.

Beispiel **abbab**:

$a^* = -1$: $A = \{-1\}$
$a^* = 0$: $A = \{-1, 0\}$
$a^* = 1$: $A = \{-1, 1\}$
$a^* = 2$: $A = \{-1, 2\}$
$a^* = 3$: $A = \{-1, 0, 3\}$
$a^* = 4$: $A = \{-1, 1, 4\}$

Beweis (A ist durch a^* bestimmt)

- a^* bestimmt die letzten $a^* + 1$ gelesenen Textzeichen als $P[0..a^*]$.

Beweis (A ist durch a^* bestimmt)

- a^* bestimmt die letzten $a^* + 1$ gelesenen Textzeichen als $P[0..a^*]$.
- Zustand $q < a^*$ ist genau dann auch aktiv, wenn die letzten $q + 1$ gelesenen Zeichen gleich $P[0..q]$ und gleich dem $(q + 1)$-Suffix von $P[..a^*]$ sind, wenn also $P[a^* - q..a^*] = P[..q]$.

Beweis (A ist durch a^* bestimmt)

- a^* bestimmt die letzten $a^* + 1$ gelesenen Textzeichen als $P[0..a^*]$.
- Zustand $q < a^*$ ist genau dann auch aktiv, wenn die letzten $q + 1$ gelesenen Zeichen gleich $P[0..q]$ und gleich dem $(q + 1)$-Suffix von $P[..a^*]$ sind, wenn also $P[a^* - q..a^*] = P[..q]$.
- Da es also zu jedem a^* nur eine mögliche Zustandsmenge A mit $a^* = \max A$ gibt, hat der DFA auf jeden Fall nicht mehr Zustände als der NFA.

Beweis (A ist durch a^* bestimmt)

UA RUHR

- a^* bestimmt die letzten $a^* + 1$ gelesenen Textzeichen als $P[0..a^*]$.
- Zustand $q < a^*$ ist genau dann auch aktiv, wenn die letzten $q + 1$ gelesenen Zeichen gleich $P[0..q]$ und gleich dem $(q + 1)$-Suffix von $P[..a^*]$ sind, wenn also $P[a^* - q..a^*] = P[..q]$.
- Da es also zu jedem a^* nur eine mögliche Zustandsmenge A mit $a^* = \max A$ gibt, hat der DFA auf jeden Fall nicht mehr Zustände als der NFA.
- Da aber auch jeder NFA-Zustand vom Startzustand aus erreichbar ist, hat der DFA auch nicht weniger Zustände als der NFA. □

DFA

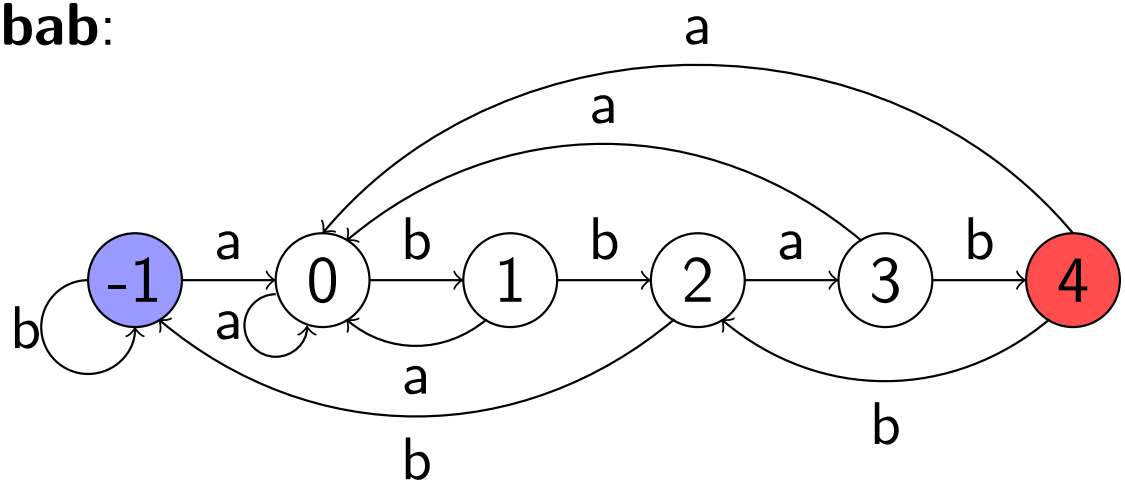
Formal ergibt sich der DFA wie folgt:

- $Q = \{-1, 0, \ldots, m-1\}$ ($m+1$ Zustände)
- $q_0 = -1$
- Σ ist das Alphabet des Textes und Patterns
- $F = \{m-1\}$
- Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$:
  Berechne eindeutige NFA-Zustandsmenge $A(q)$ mit $q = \max A(q)$. Wende hierauf Δ für jedes c an; extrahiere Maximum:

$$\delta(q, c) := \max \Delta(A(q), c)$$

DFA

DFA für **abbab**:



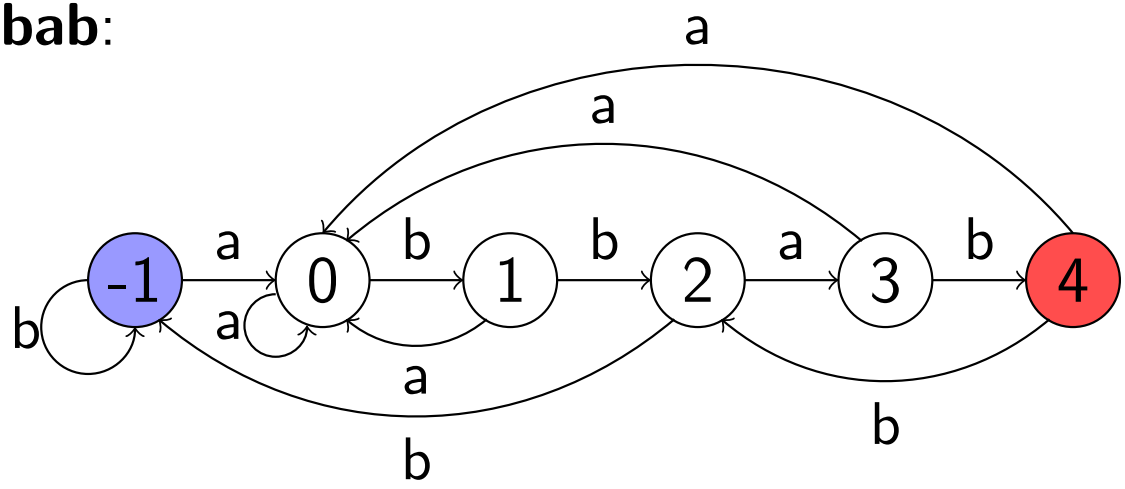
Beispiel: $q = 3$, $a^* = 3$, $A = \{-1, 0, 3\}$, $c = \mathrm{a}$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(-1, \mathrm{a}) &= \{-1, 0\} \\ \Delta(0, \mathrm{a}) &= \{\ \} \\ \Delta(3, \mathrm{a}) &= \{\ \} \end{aligned}\right\} \text{Vereinigung: } \{-1, 0\}$$

Also $\delta(3, \mathrm{a}) = 0$.

DFA

DFA für **abbab**:



Beispiel: $q = 3$, $a^* = 3$, $A = \{-1, 0, 3\}$, $c = \mathrm{b}$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta(-1, \mathrm{b}) &= \{-1\} \\ \Delta(0, \mathrm{b}) &= \{1\} \\ \Delta(3, \mathrm{b}) &= \{4\} \end{aligned}\right\} \text{Vereinigung: } \{-1, 1, 4\}$$

Also $\delta(3, \mathrm{b}) = 4$.

Quellcode für DFA

```
1  def DFA_matcher(P, T):
2      delta = DFA_delta_table(P)
3      (q, m, n) = (-1, len(P), len(T))
4      for i in range(n):
5          q = delta(q, T[i])
6          if q == m - 1:
7              yield (i-m+1, i+1)
8
9  def DFA(P, T):
10     for s, e in DFA_matcher(P, T):
11         print("found:", s, e)
```

Zum Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus

Exakte Mustersuche mit einem DFA ist relativ effizient, sobald der Automat (δ-Funktion) erstellt wurde.

Knuth, Morris und Pratt ("KMP") beschreiben einen Algorithmus, der die Übergangsfunktion kompakt darstellt.

Merkmal	*DFA*	*KMP*
Zeit zur Konstruktion der δ-Tabelle	$\mathcal{O}(m^2\|\Sigma\|)$	$\mathcal{O}(m)$
Speicherplatz der δ-Tabelle	$\mathcal{O}(m\|\Sigma\|)$	$\mathcal{O}(m)$
Zeit für Mustersuche im Text	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$

Die lps-Funktion

Idee: Wir simulieren den DFA-Übergang, indem wir den NFA-Übergang simulieren und $A(q)$ on-the-fly berechnen.

$A(q)$ ist die eindeutige Zustandsmenge, die q als maximales Element hat. Welches ist das nächstkleinere Element von $A(q)$?

Die lps-Funktion

Idee: Wir simulieren den DFA-Übergang, indem wir den NFA-Übergang simulieren und $A(q)$ on-the-fly berechnen.

$A(q)$ ist die eindeutige Zustandsmenge, die q als maximales Element hat. Welches ist das nächstkleinere Element von $A(q)$?

Definition (lps-Funktion)

Zu $P \in \Sigma^m$ definieren wir $\text{lps} : \{0, \ldots, m-1\} \to \mathbb{N}$:

$$\text{lps}(q) := \max\{|s| \leq q \,:\, s \text{ ist Präfix von } P \text{ und Suffix von } P[..q]\}.$$

("**l**ängstes **P**räfix von P, das echtes **S**uffix von $P[..q]$ ist")

Die lps-Funktion

- $A(q)$: aktive NFA-Zustände, wenn $q = \max A(q)$
- $\text{lps}(q) = \max\{|s| \leq q \ : \ s \text{ Präfix von } P \text{ und Suffix von } P[..q]\}$

Die lps-Funktion

- $A(q)$: aktive NFA-Zustände, wenn $q = \max A(q)$
- $\text{lps}(q) = \max\{|s| \leq q \ : \ s \text{ Präfix von } P \text{ und Suffix von } P[..q]\}$
- Zustand q aktiv $\Leftrightarrow$ letzte $q+1$ Textzeichen sind $P[0..q]$
- p und q aktiv, $p < q$: Es muss $P[q-p..q] = P[..p]$ sein

Lemma

$$A(q) = \{\, q,\ lps(q) - 1,\ lps(lps(q) - 1) - 1,\ \ldots, -1 \,\}$$

Die lps-Funktion

- $A(q)$: aktive NFA-Zustände, wenn $q = \max A(q)$
- $\text{lps}(q) = \max\{|s| \leq q \ : \ s \text{ Präfix von } P \text{ und Suffix von } P[..q]\}$
- Zustand q aktiv $\Leftrightarrow$ letzte $q+1$ Textzeichen sind $P[0..q]$
- p und q aktiv, $p < q$: Es muss $P[q-p..q] = P[..p]$ sein

Lemma

$$A(q) = \{\, q,\ lps(q)-1,\ lps(lps(q)-1)-1,\ \ldots, -1 \,\}$$

q	0	1	2	3	4	5	6
P[q]	a	b	a	b	a	c	a
lps[q]	0	0	1	2	3	0	1

Simulation der δ-Funktion mit lps

Beginnend in q, wenn das gelesene Zeichen c nicht das nächste Zeichen in P ist, gehe zurück auf den nächst kleineren Zustarnd in $A(q)$, bis entweder c passt oder $A(q)$ erschöpft ist.

```
1 def DFA_delta_lps(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m-1 or (P[q+1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q+1] == c:
6         q += 1
7     return q
```

Laufzeitanalyse der Mustersuche mit KMP

Lemma

Die Laufzeit des Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus auf einem Text der Länge n ist $\mathcal{O}(n)$, wenn die lps-Funktion des Musters vorliegt.

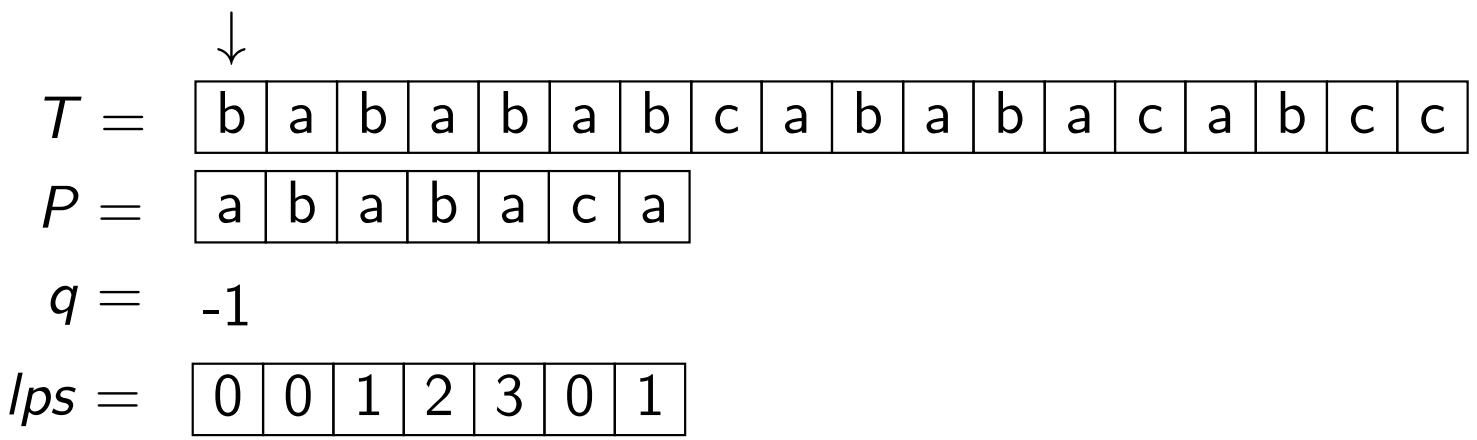
- Aufruf von `DFA_delta_lps` kann $\mathcal{O}(m)$ Zeit kosten (while).
- `DFA_delta_lps` wird $\mathcal{O}(n)$ mal aufgerufen.
- **Gesamtzahl** der while-Durchläufe ist beschränkt:
  q wird kleiner!
- Pro Funktionsaufruf wird q höchstens um 1 erhöht.
- q immer zwischen -1 und m

Amortisierte Analyse!

Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

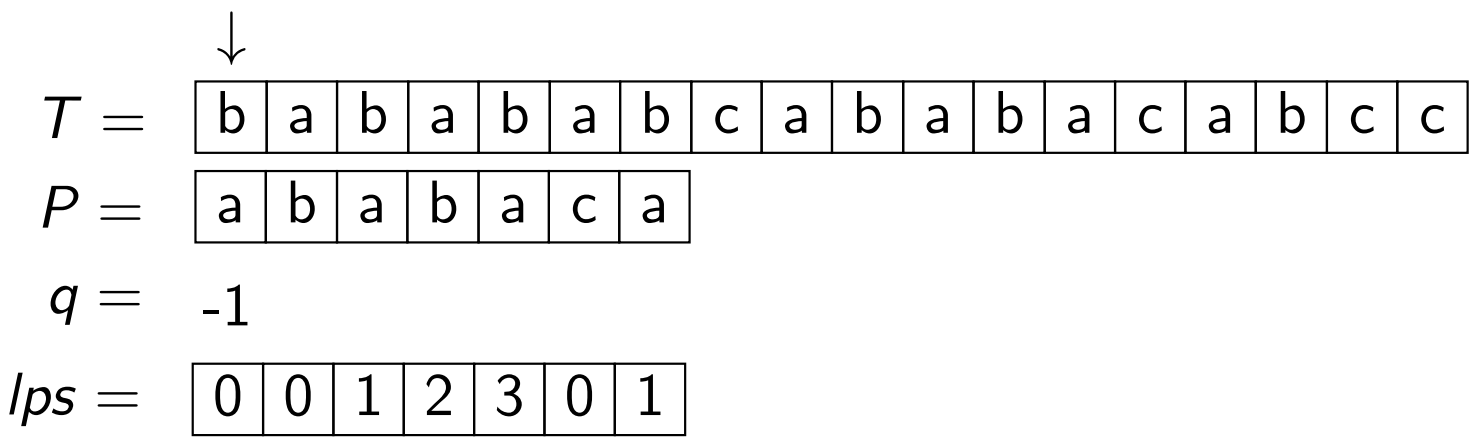
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

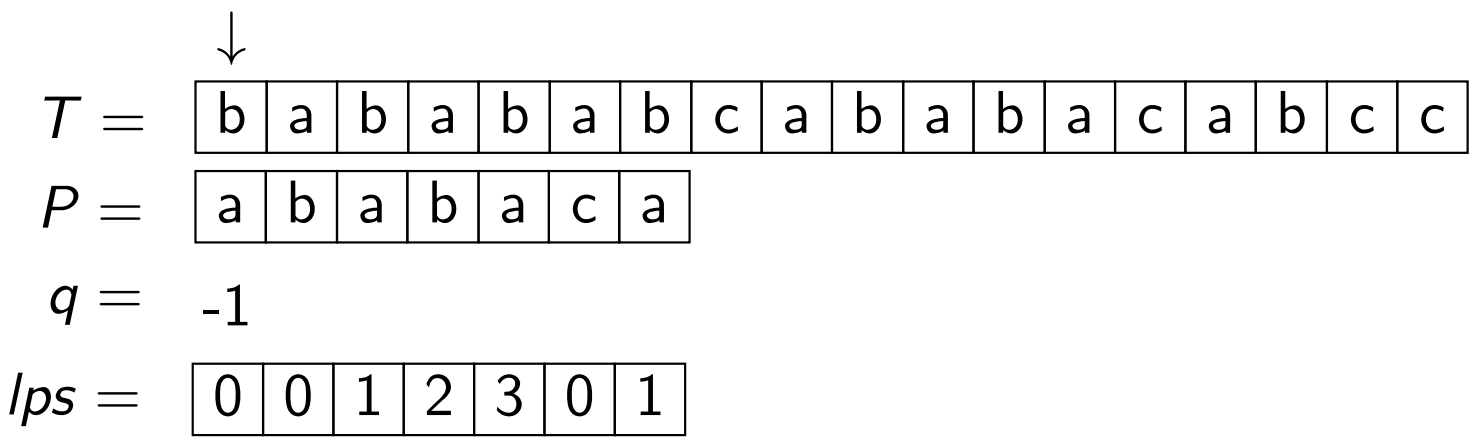
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

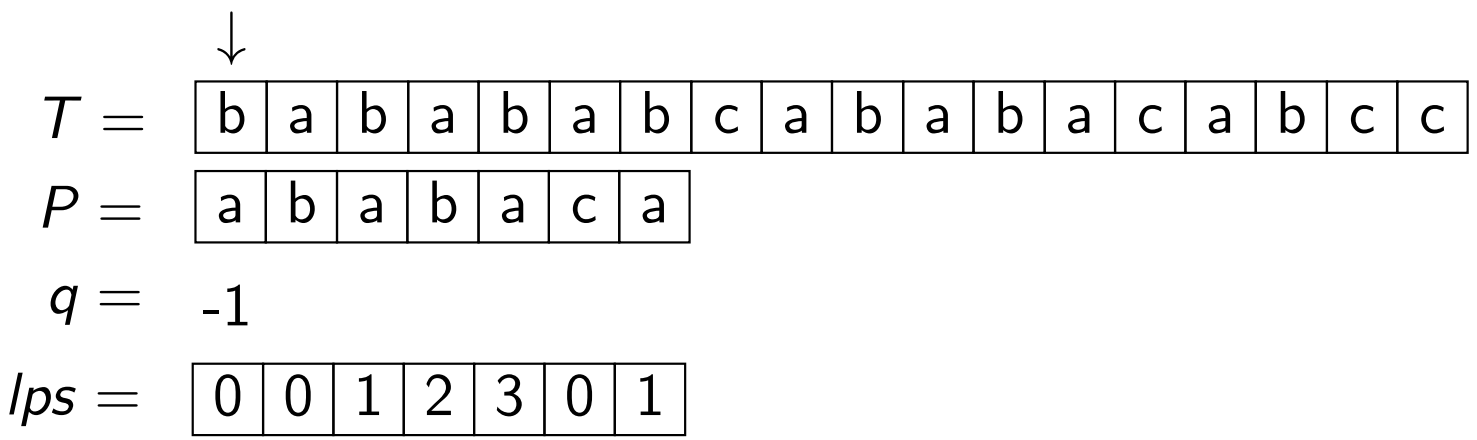
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

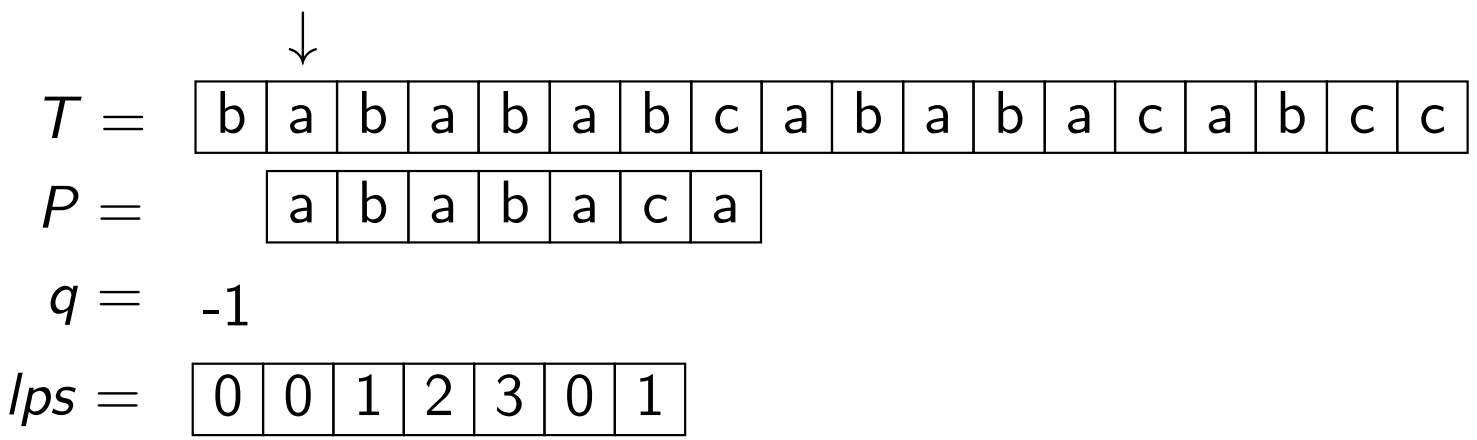
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

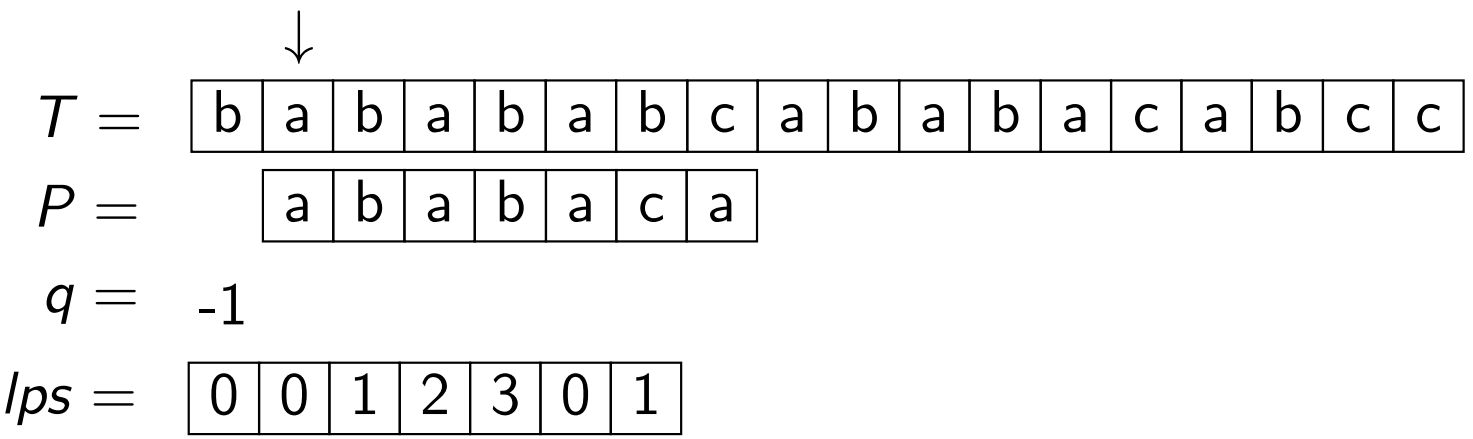
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

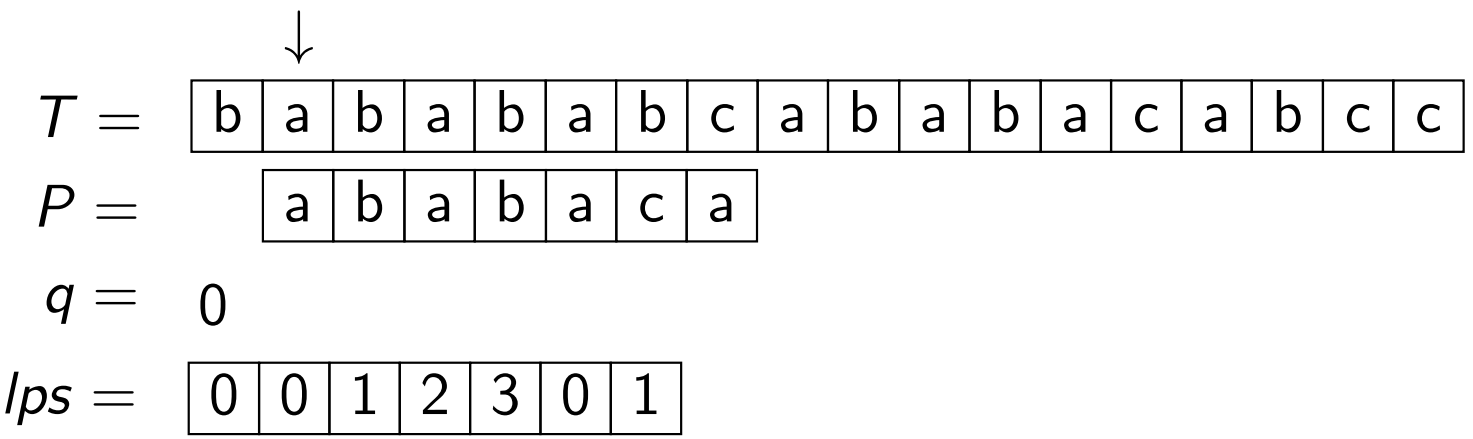
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

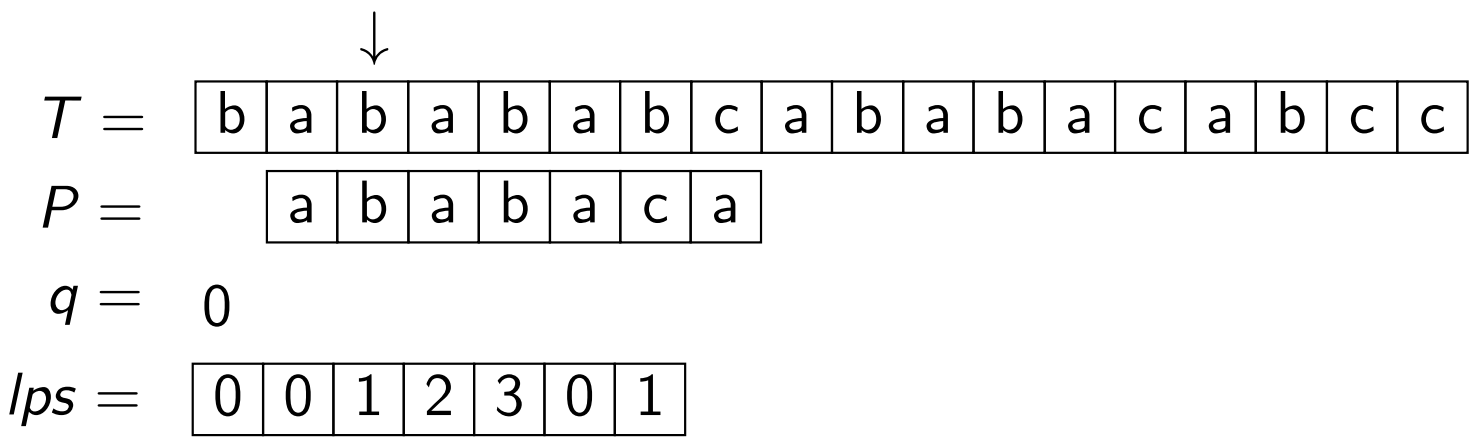
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

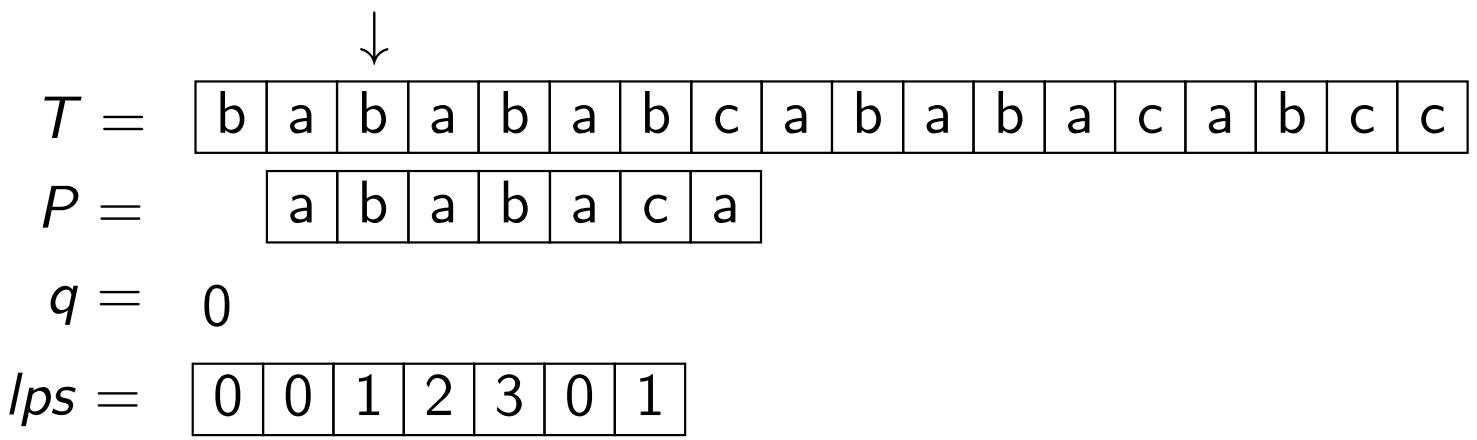
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

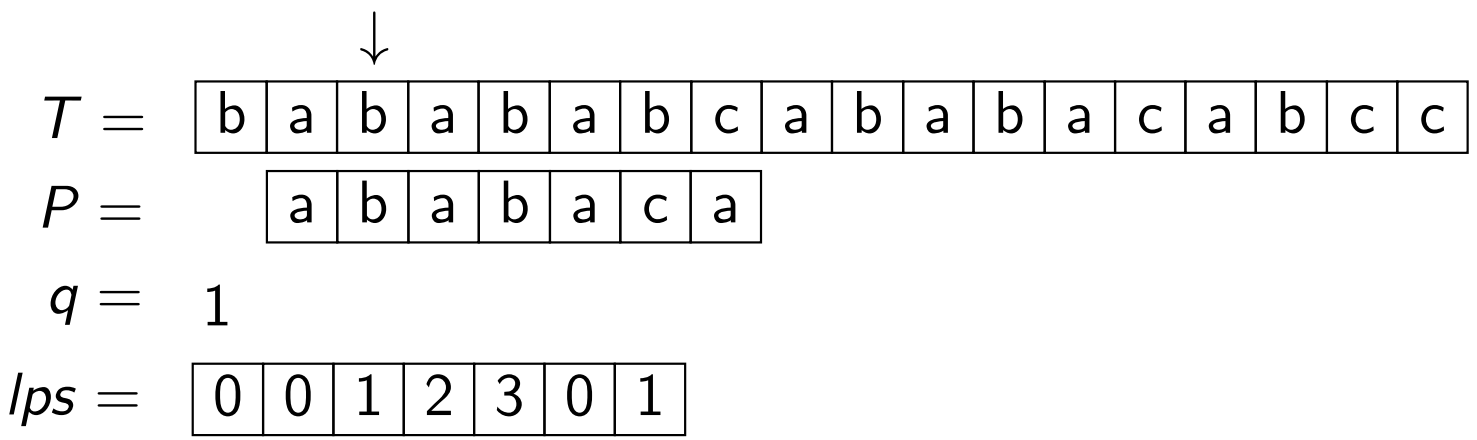
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

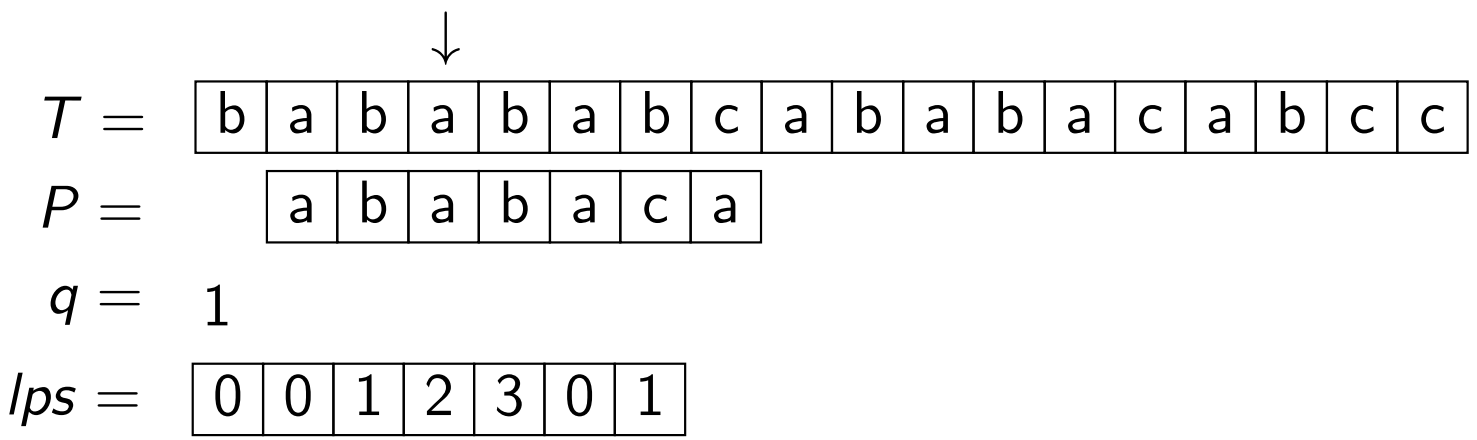
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

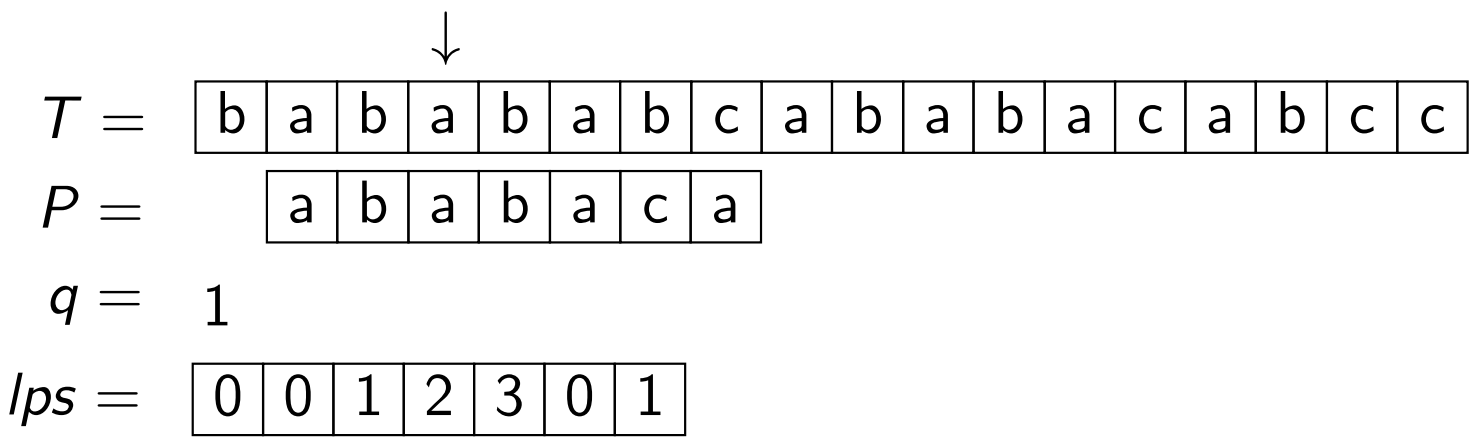
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

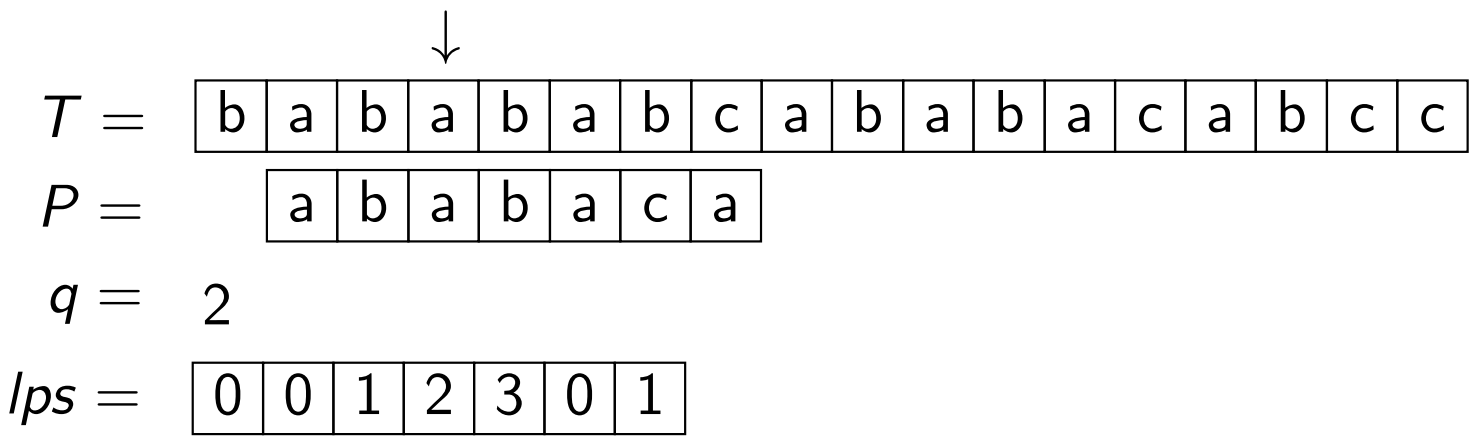
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

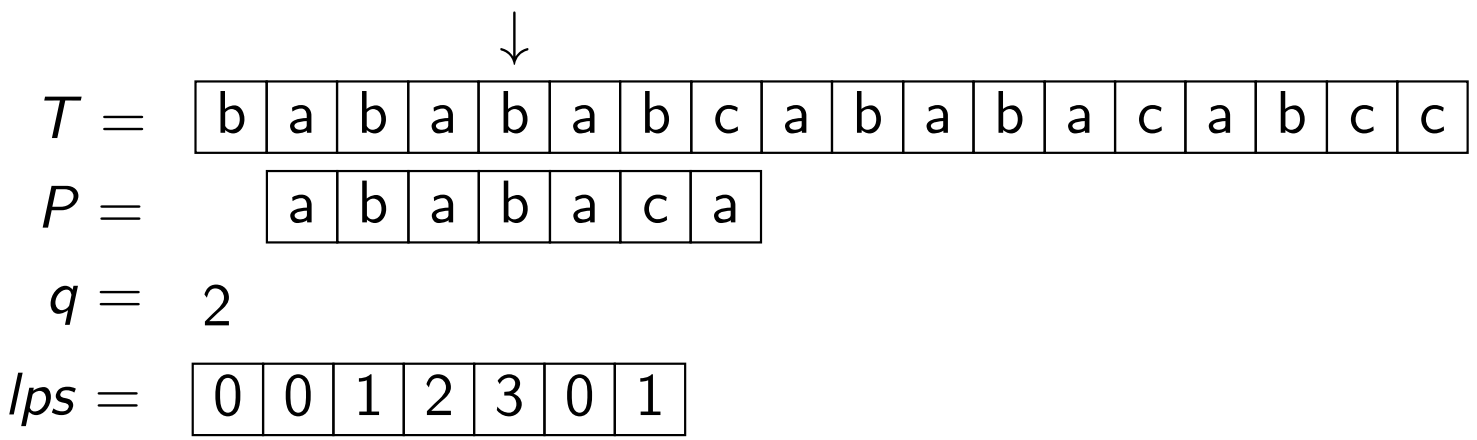
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

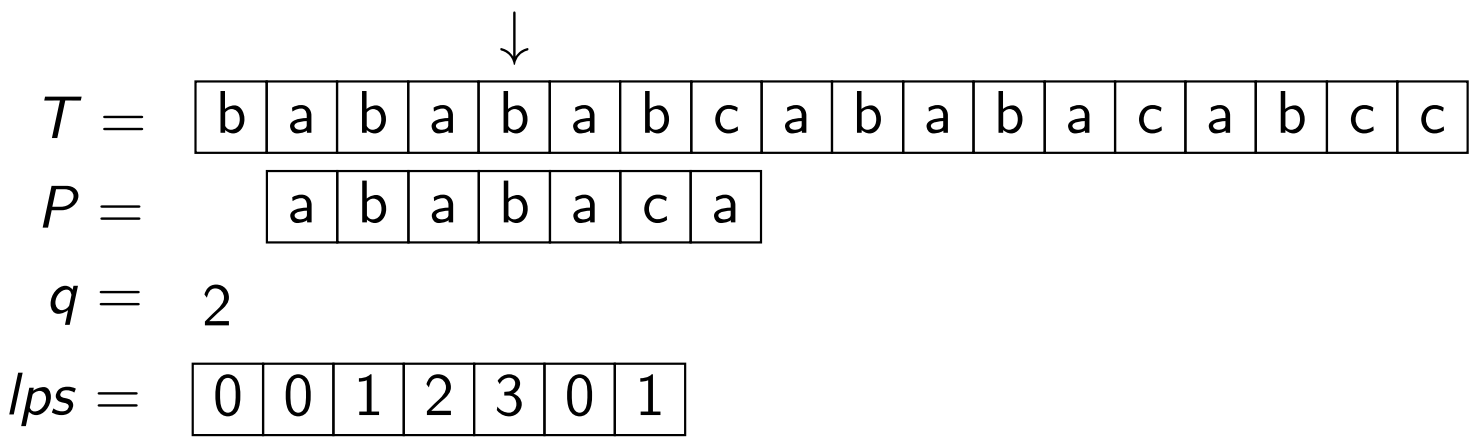
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

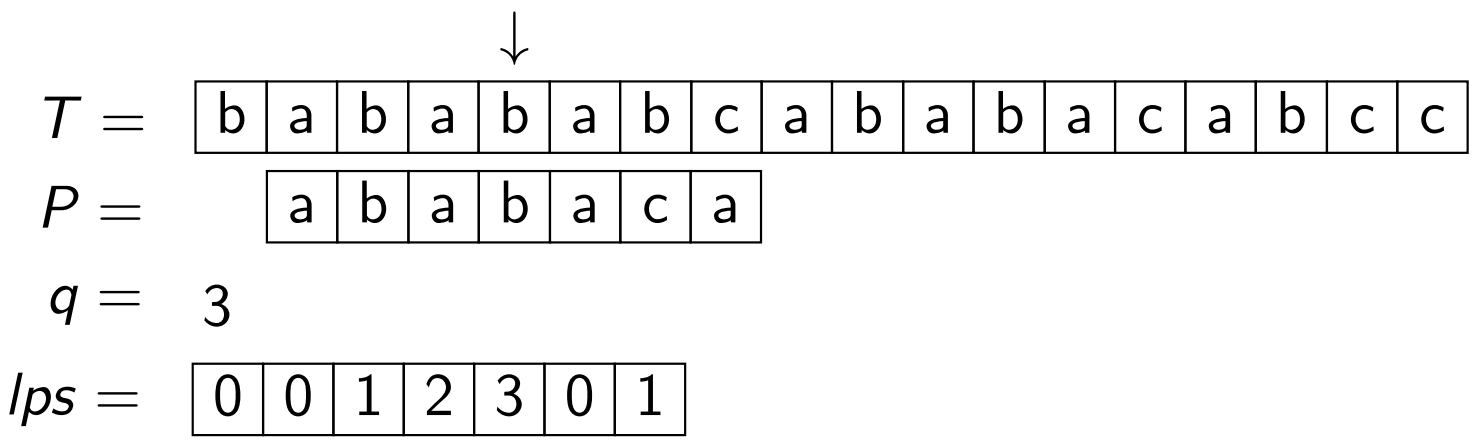
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

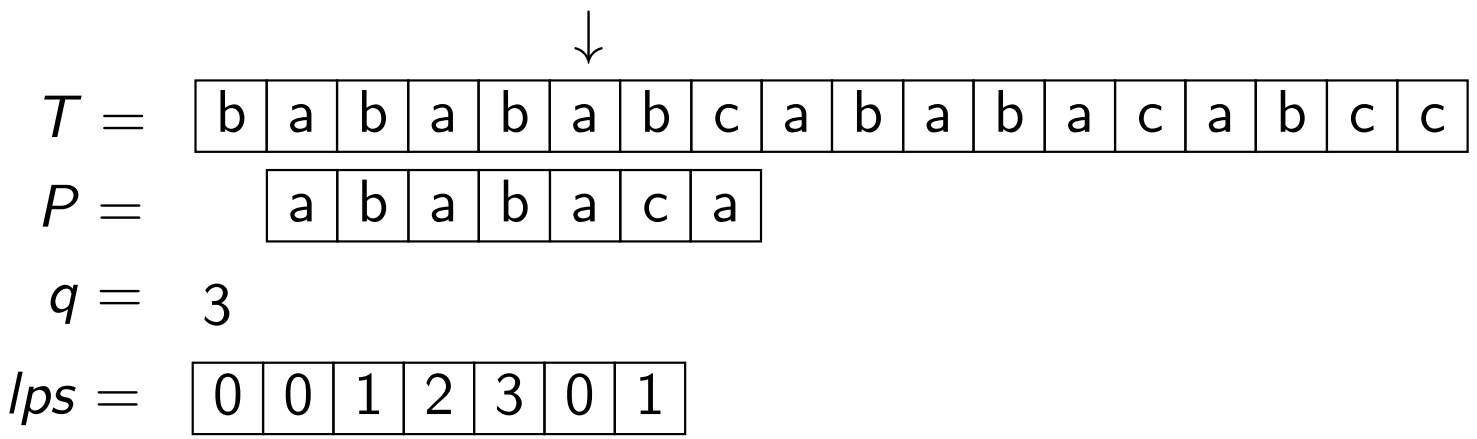
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

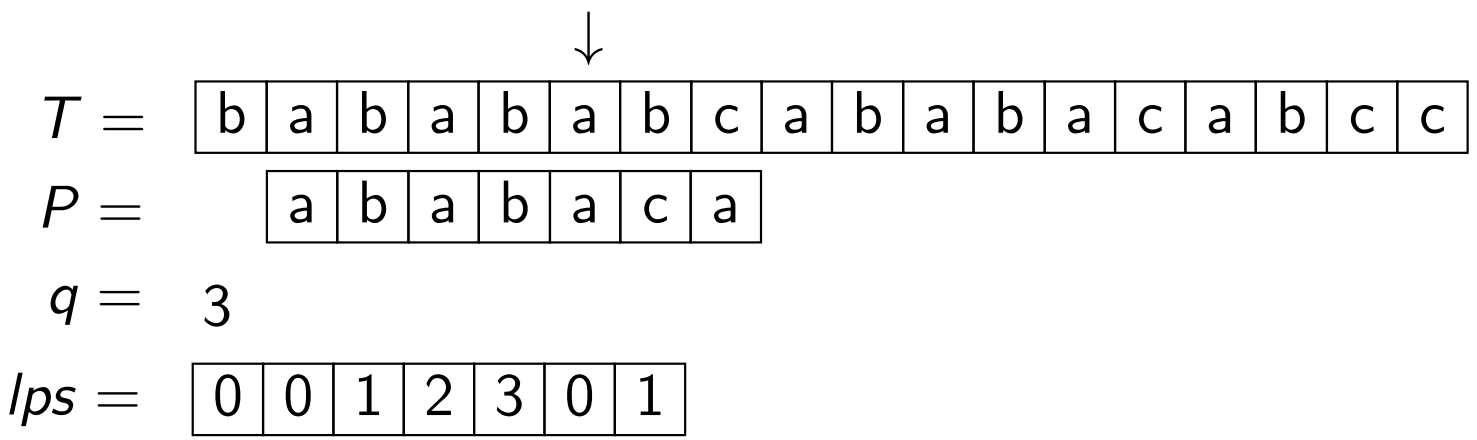
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

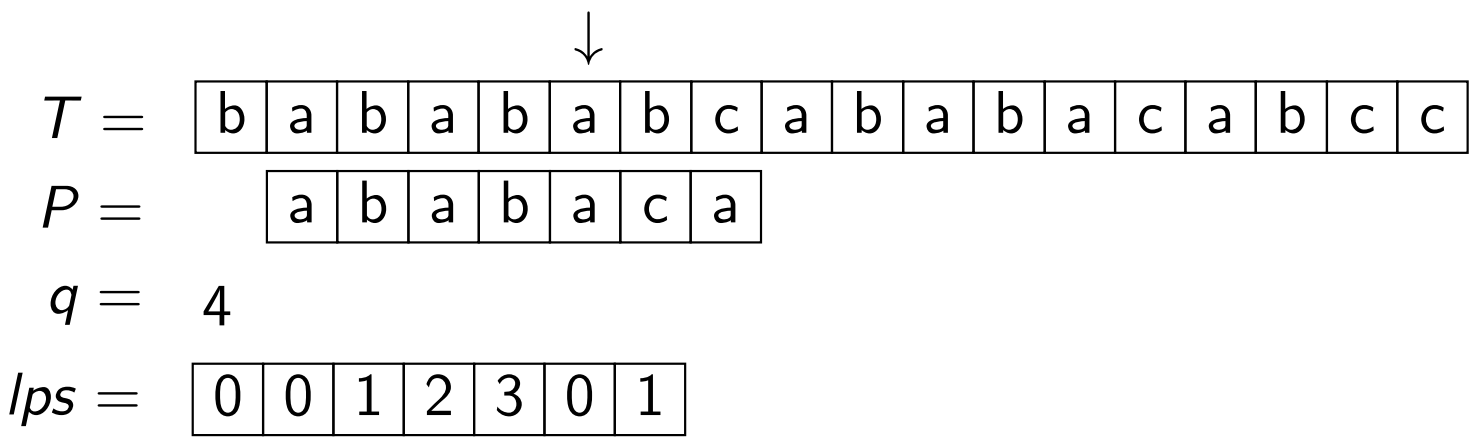
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

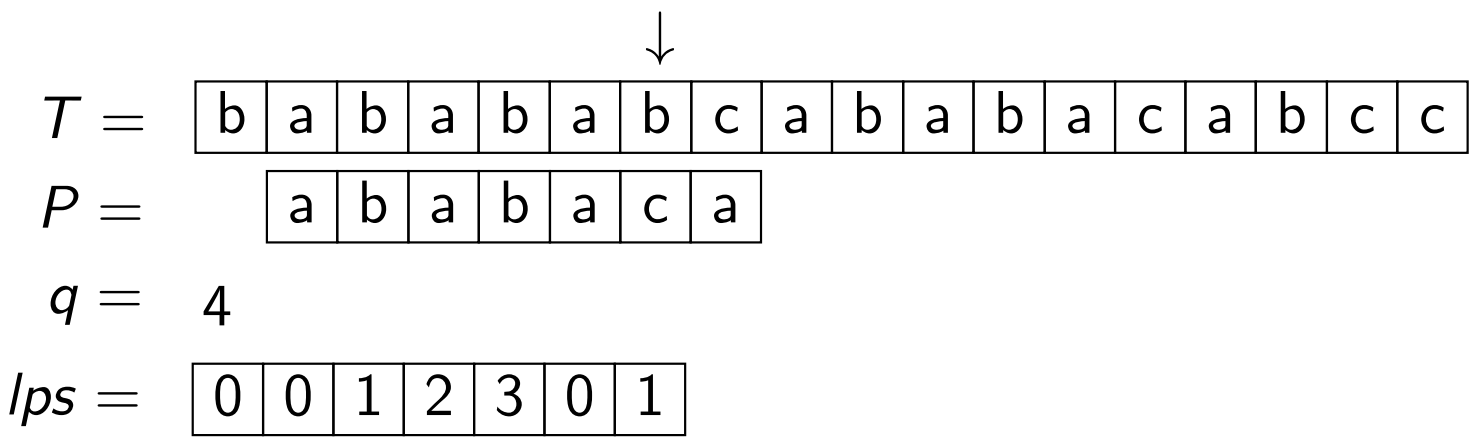
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

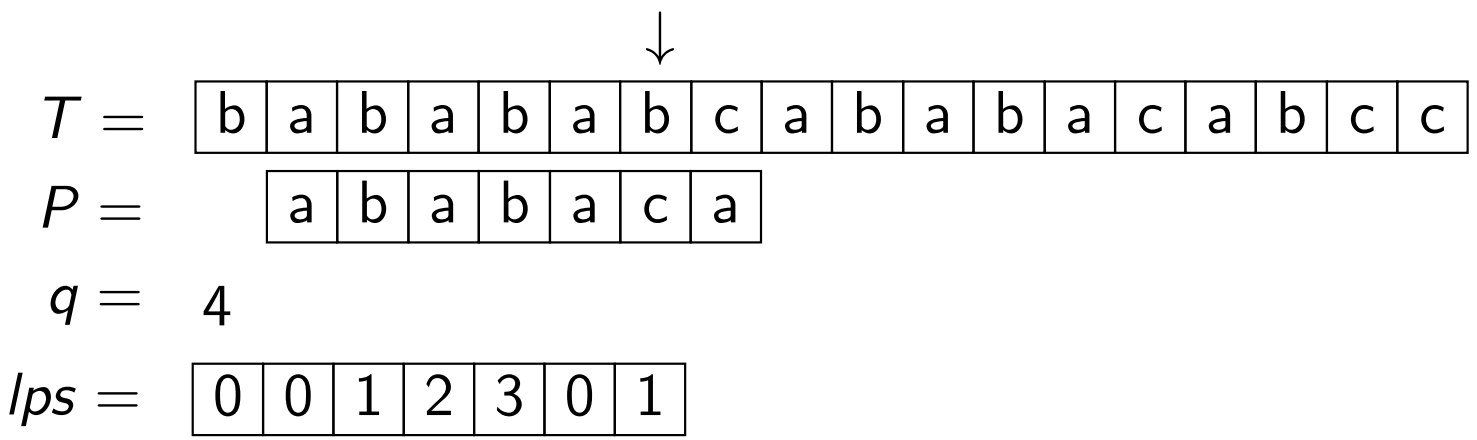
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

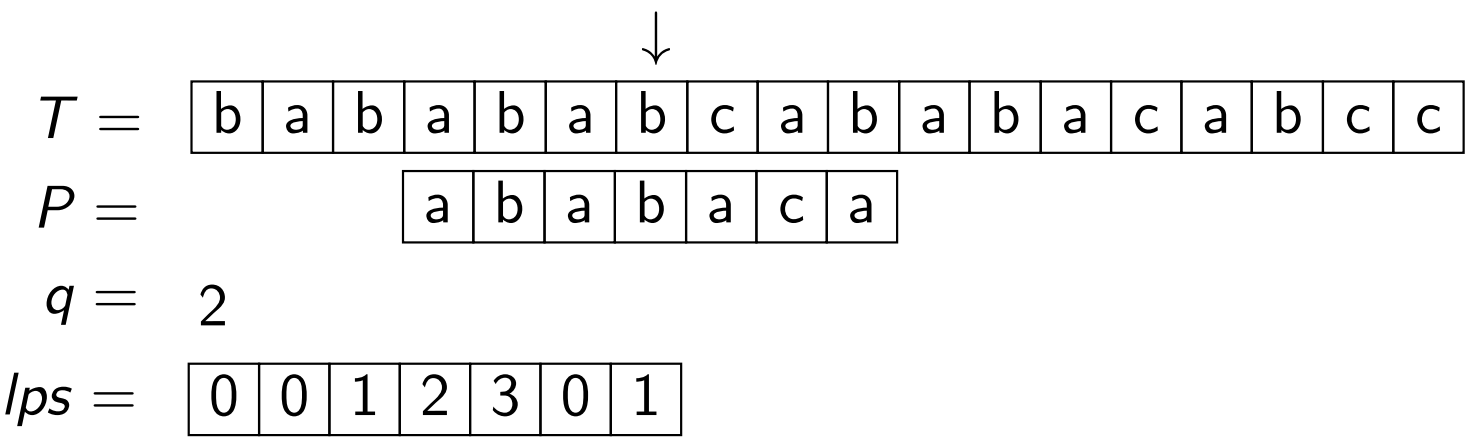
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

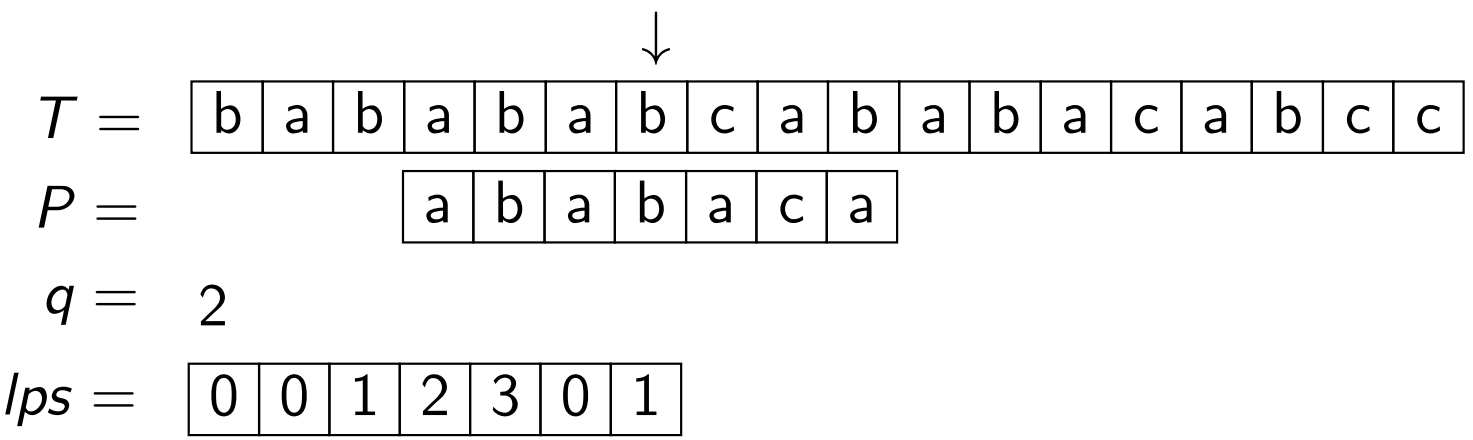
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

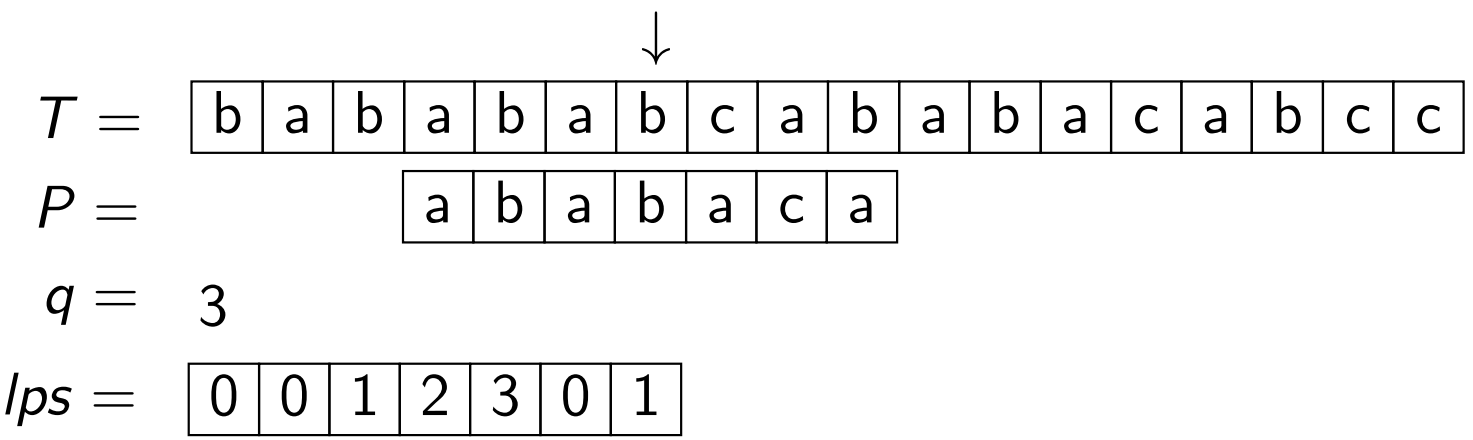
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

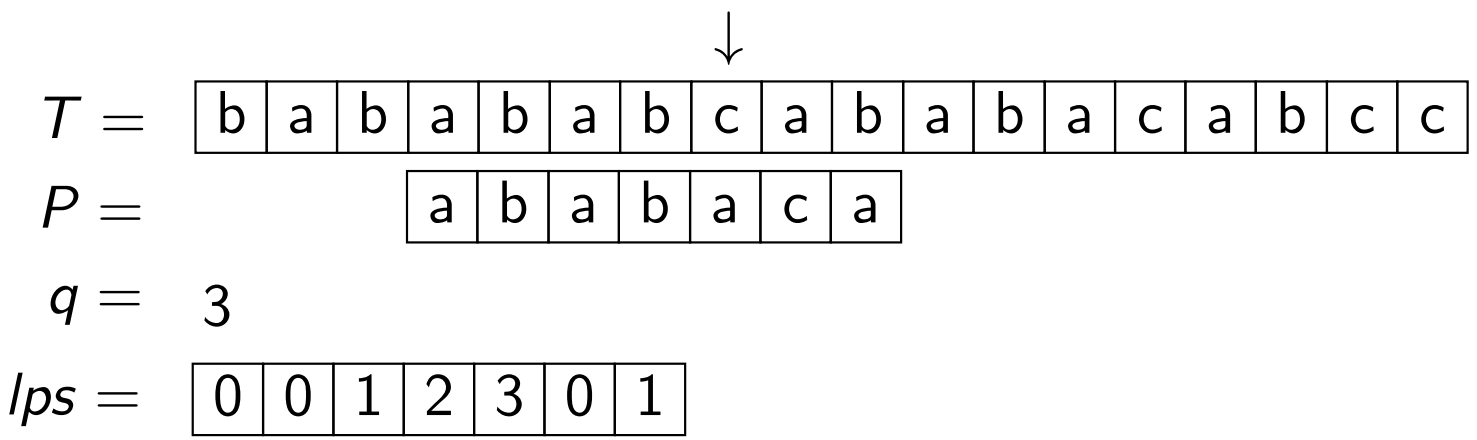
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

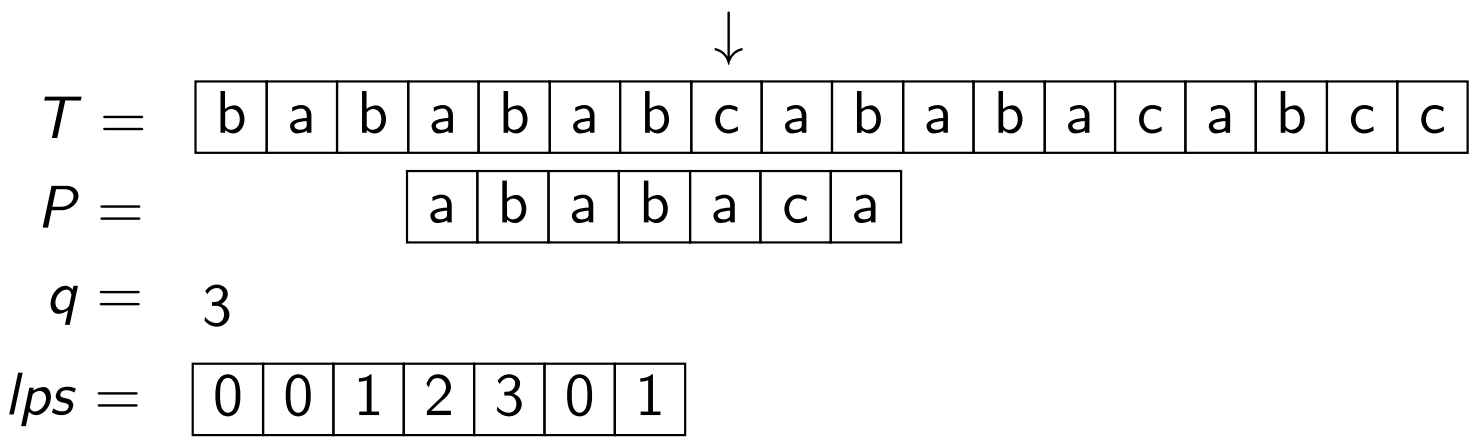
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

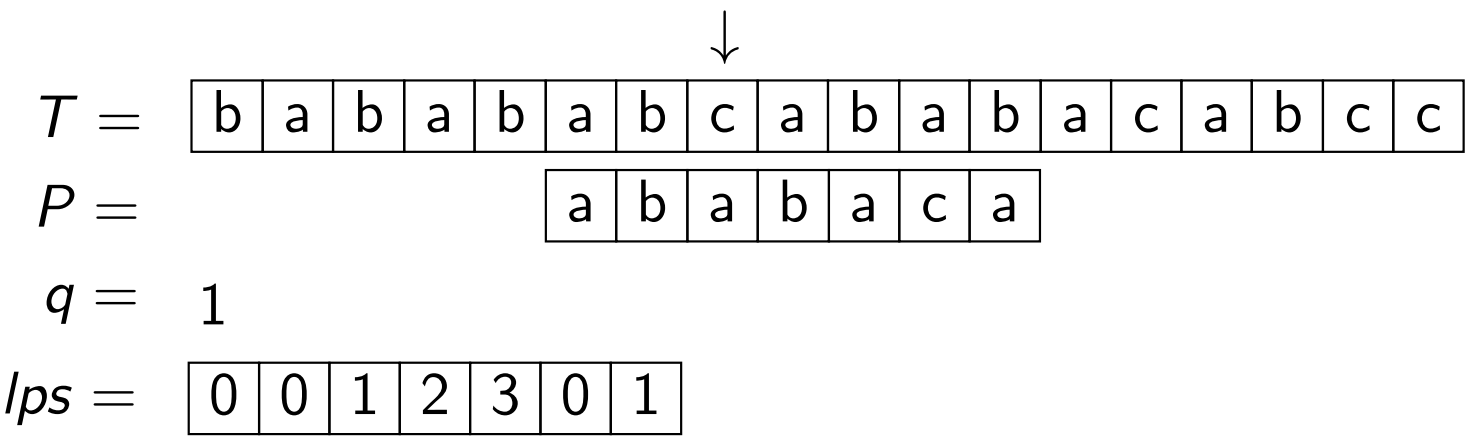
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

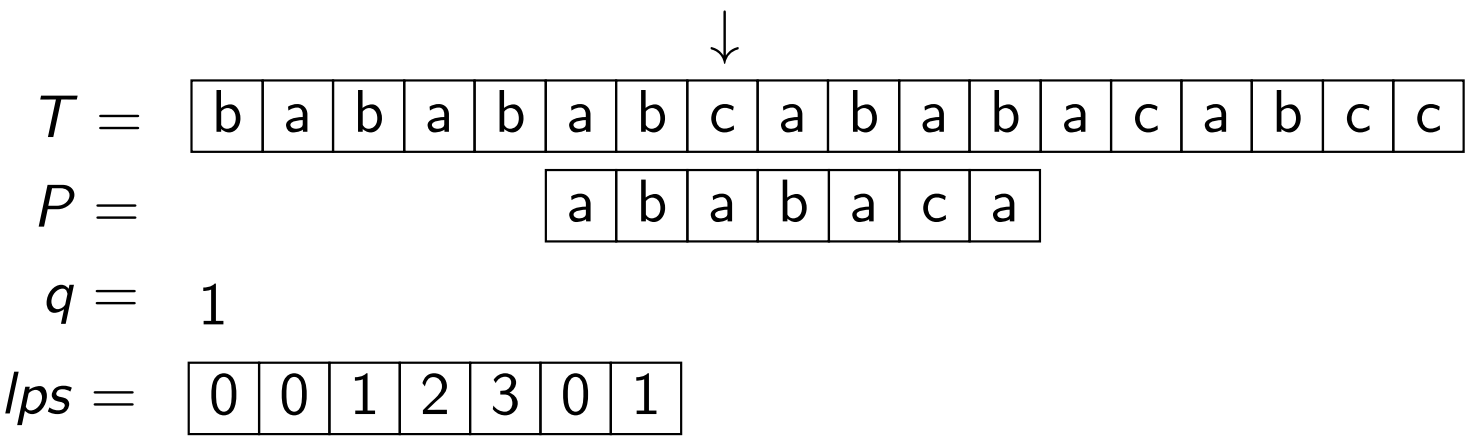
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

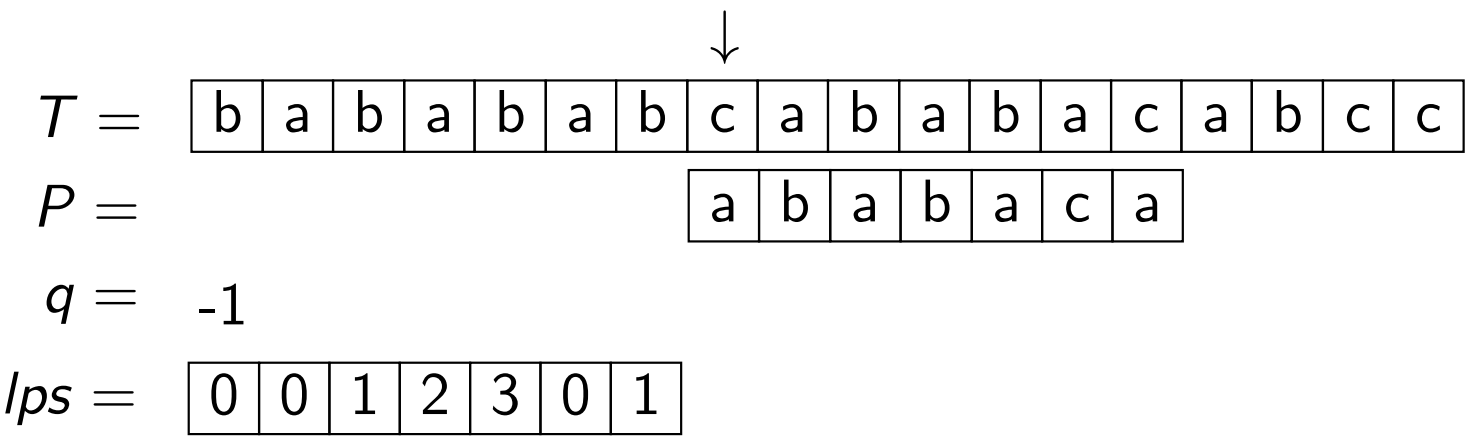
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

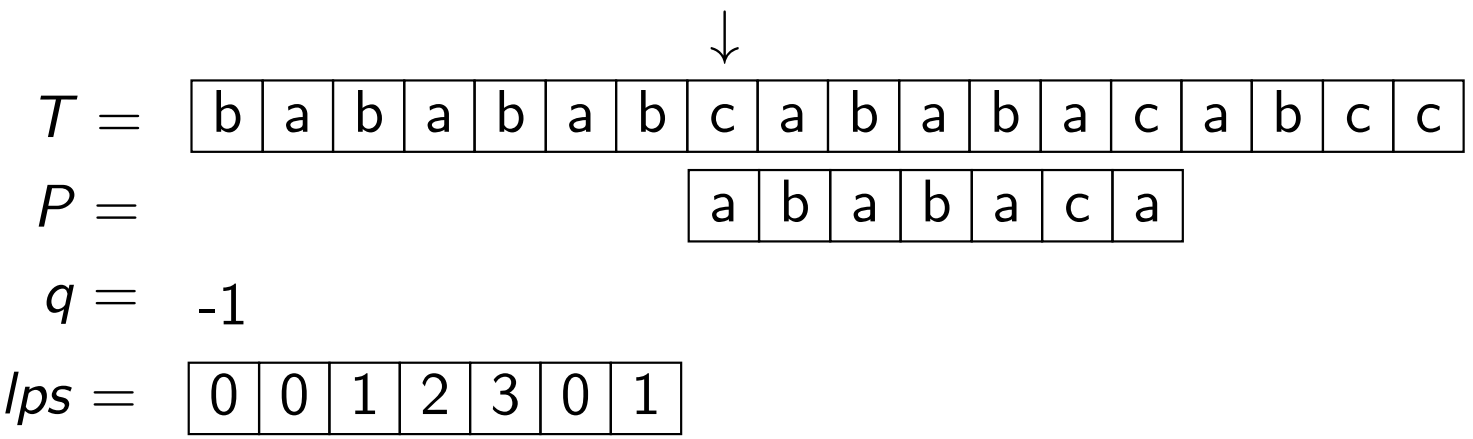
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

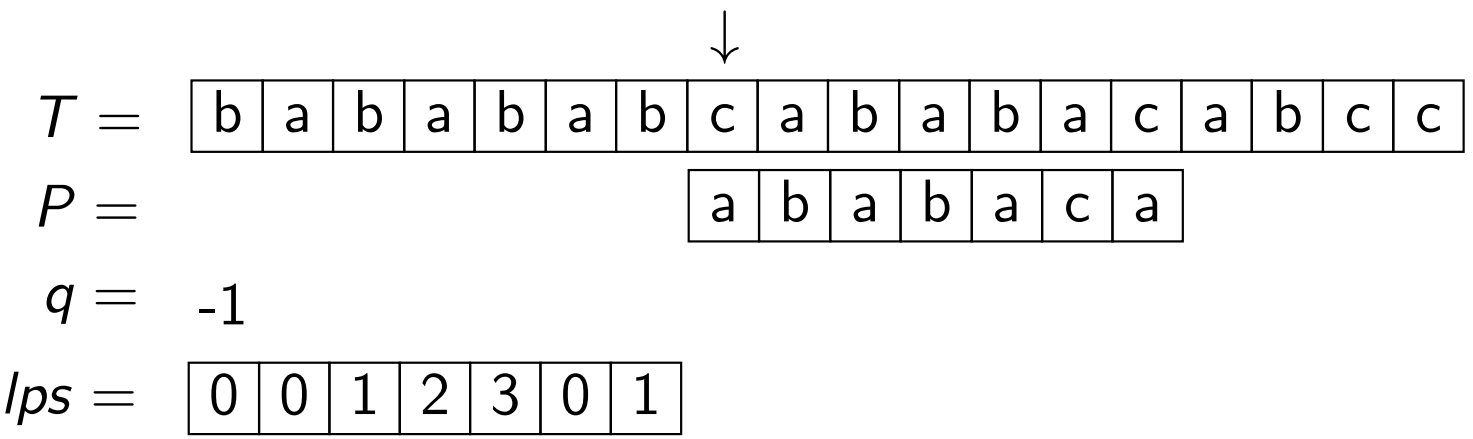
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

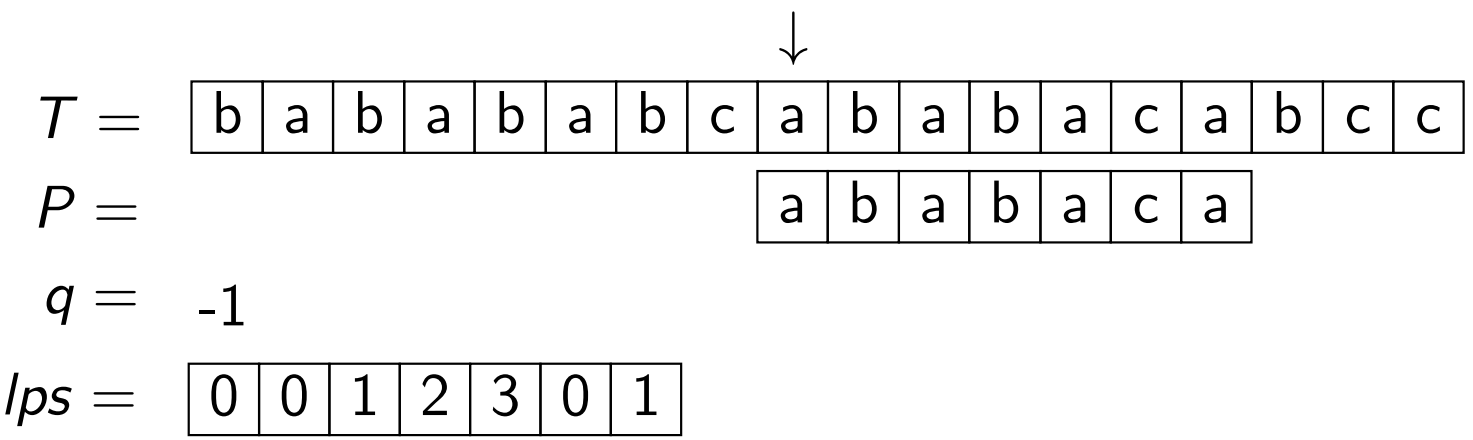
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

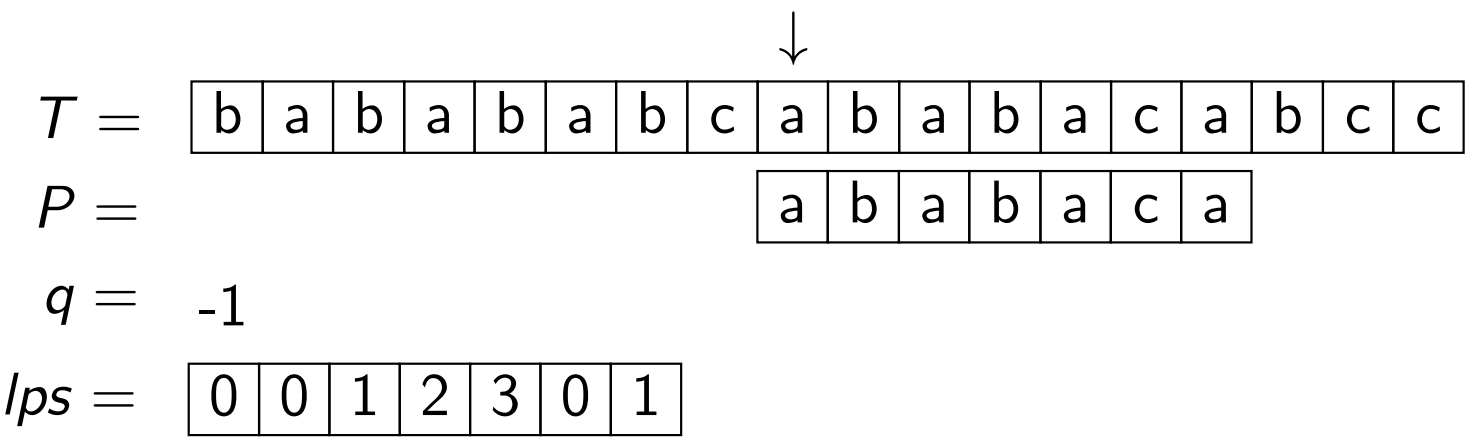
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

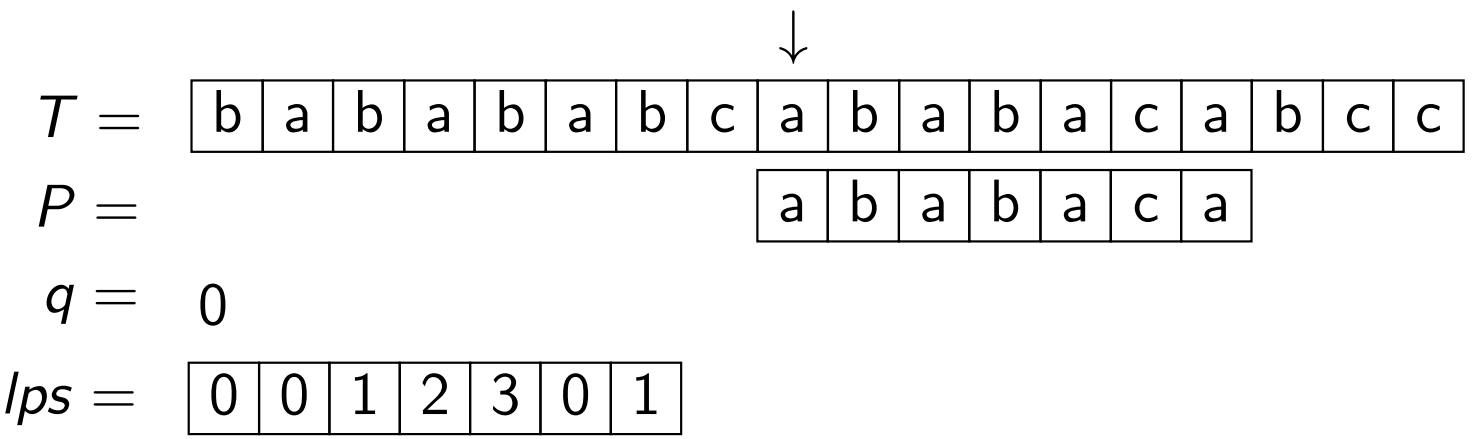
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

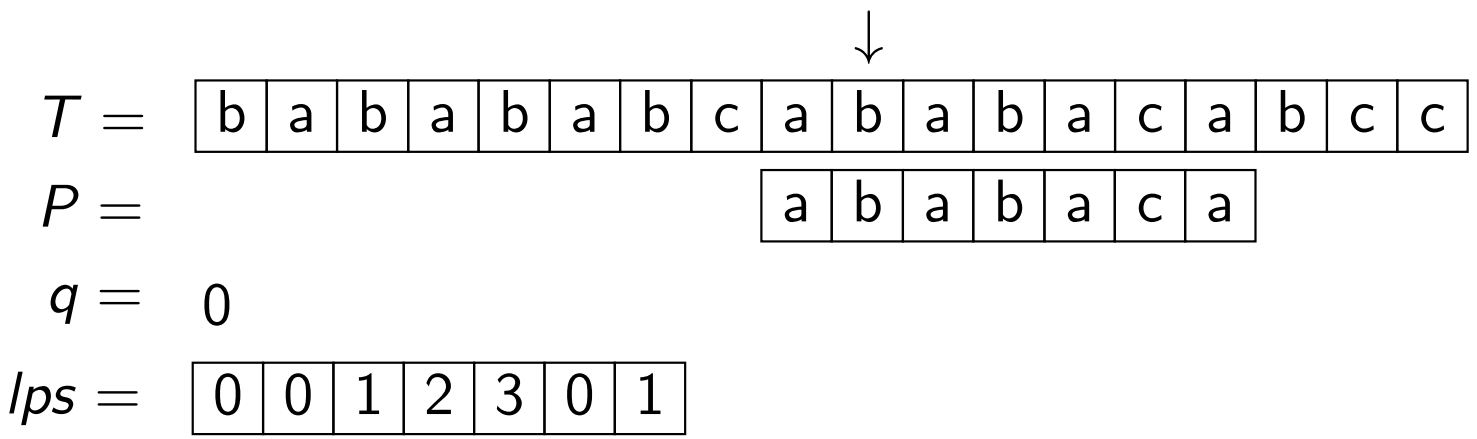
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

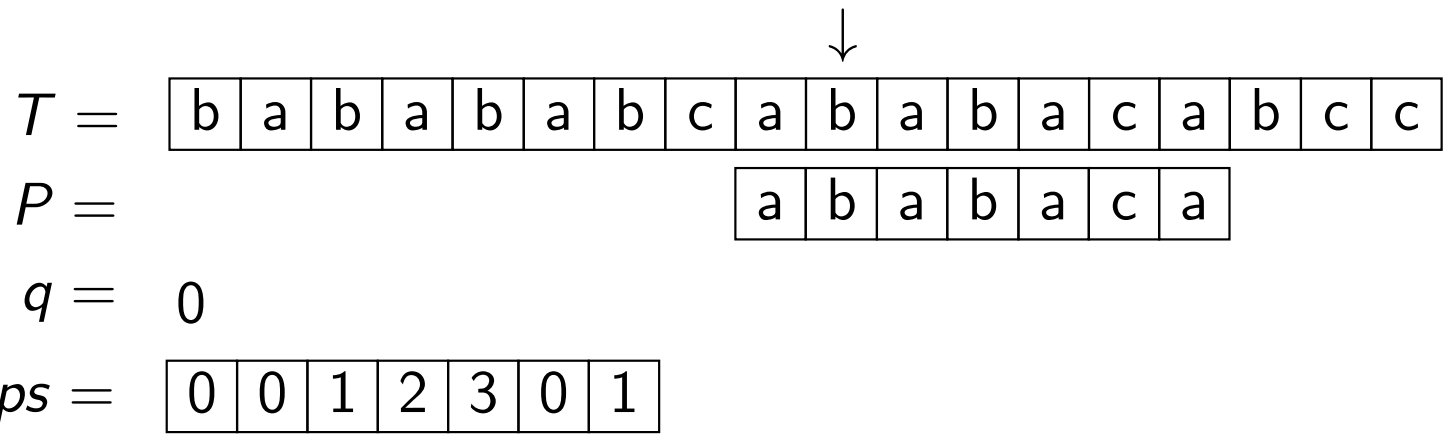
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

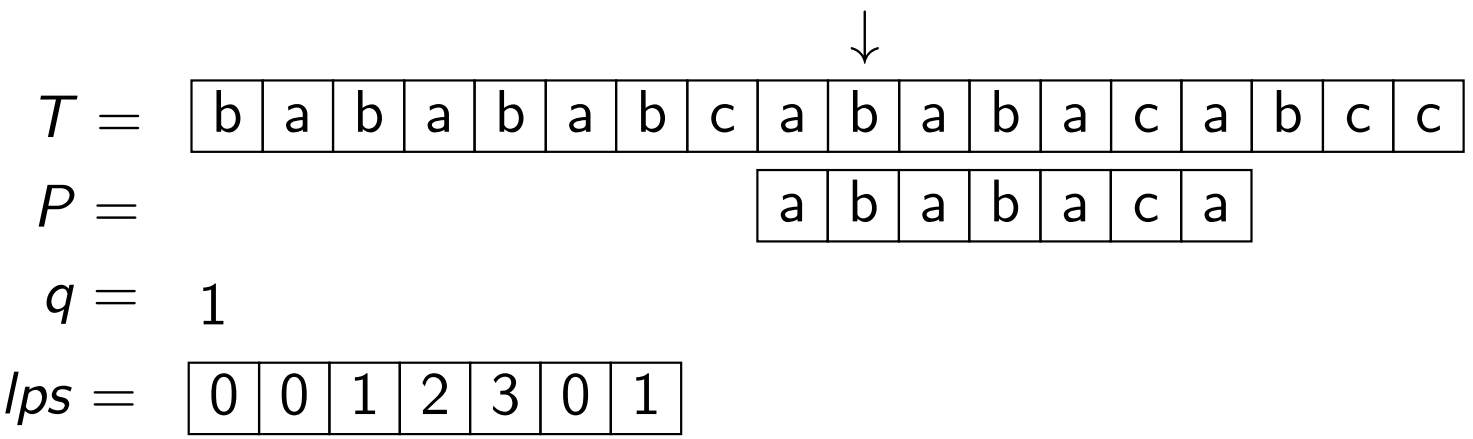
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

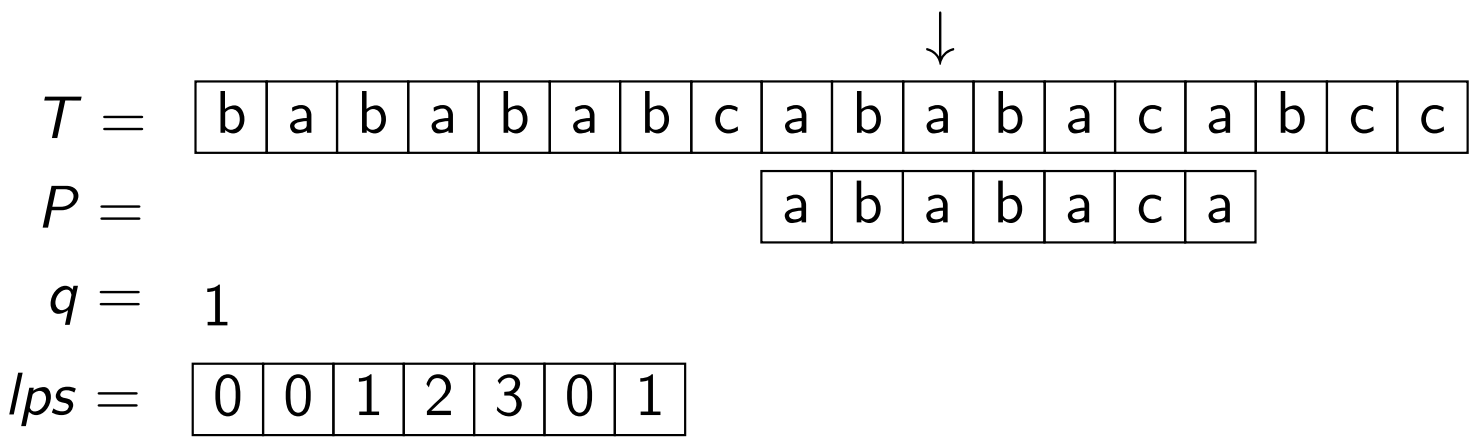
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

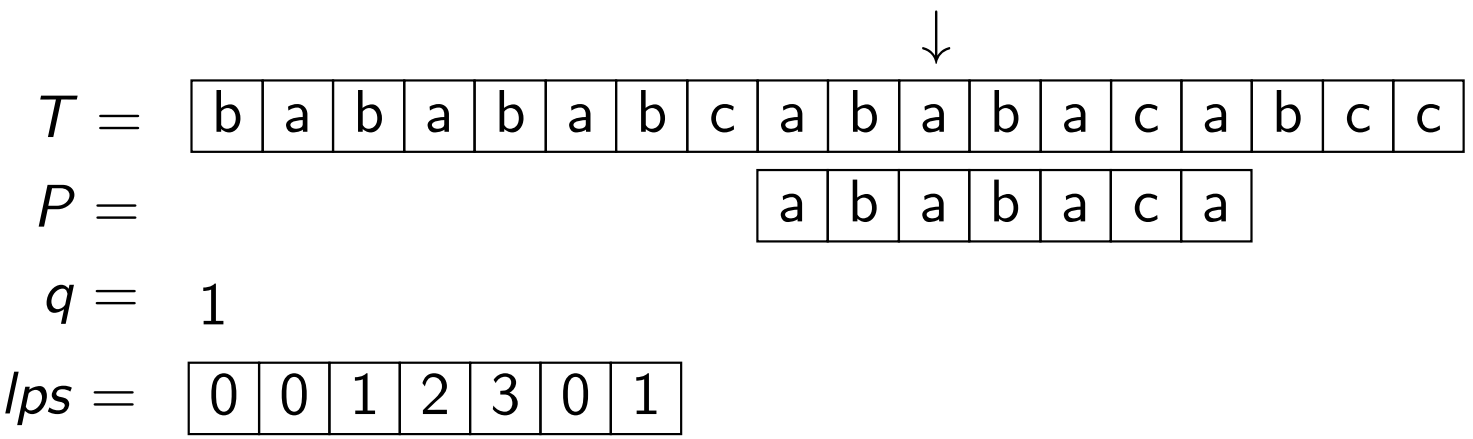
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

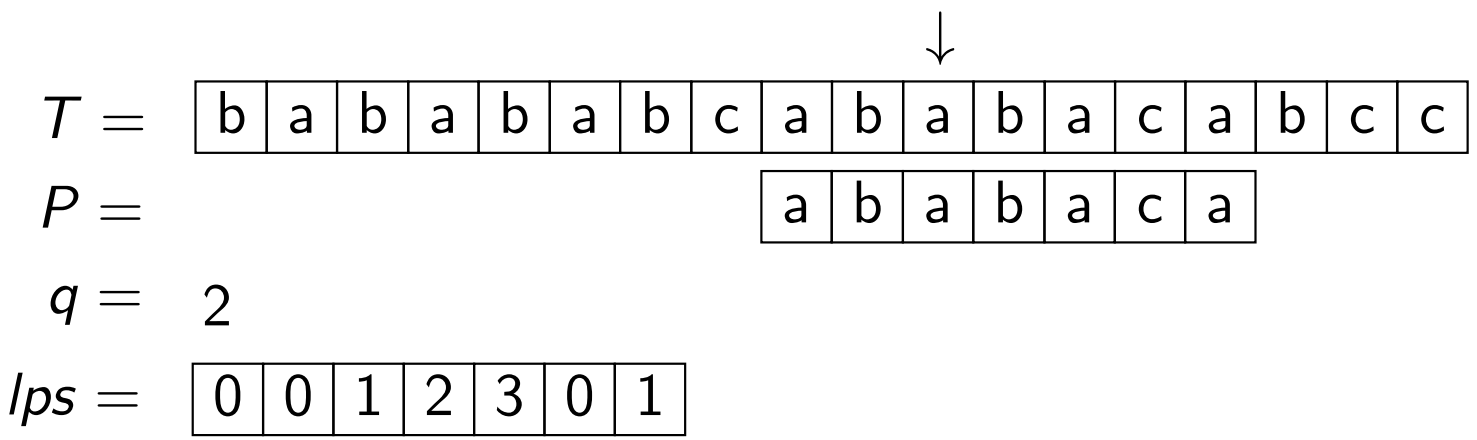
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

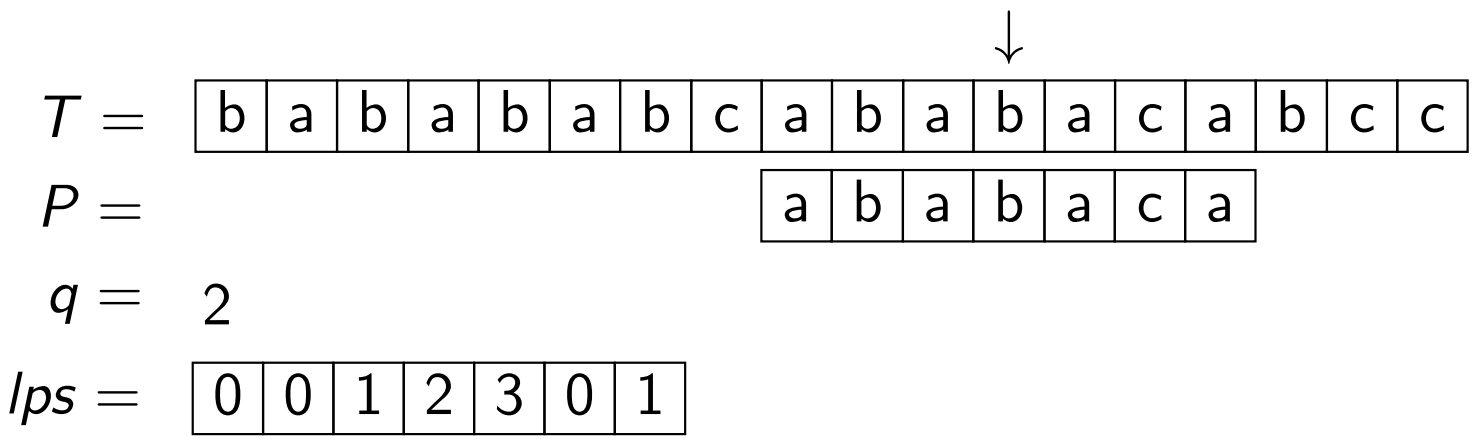
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

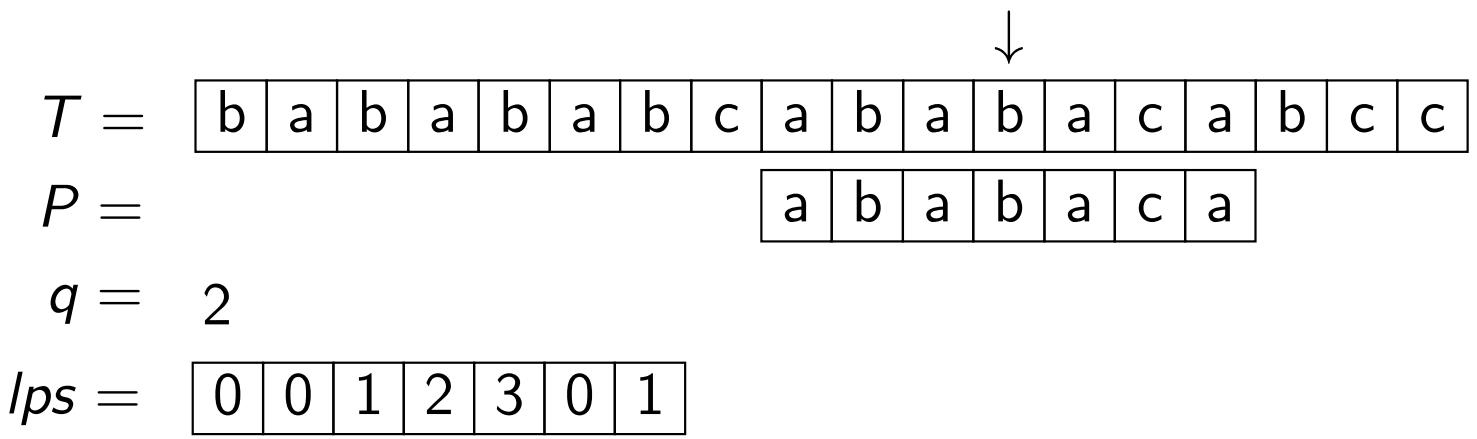
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

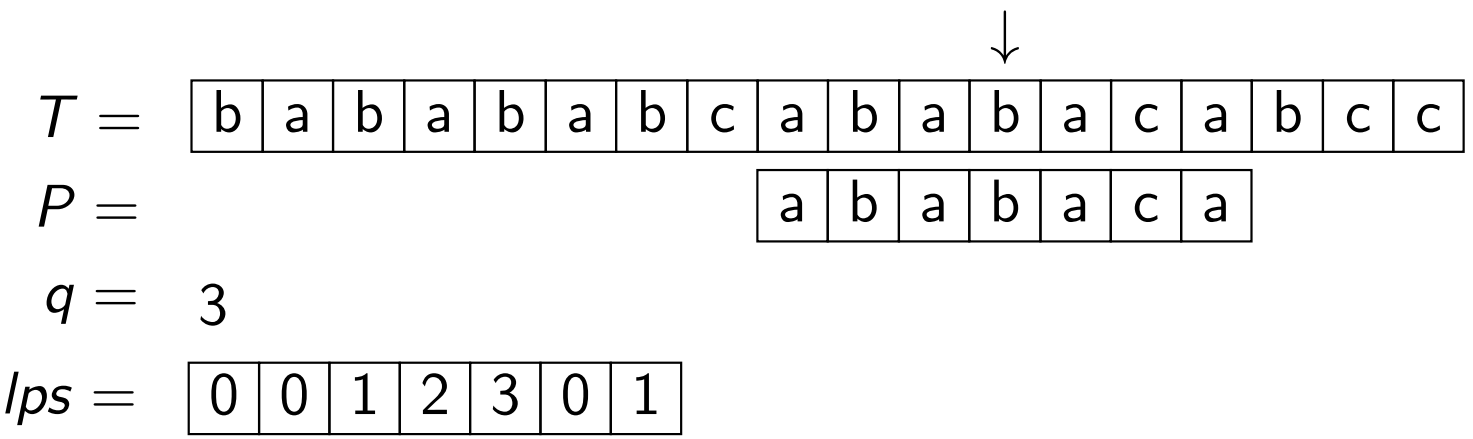
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

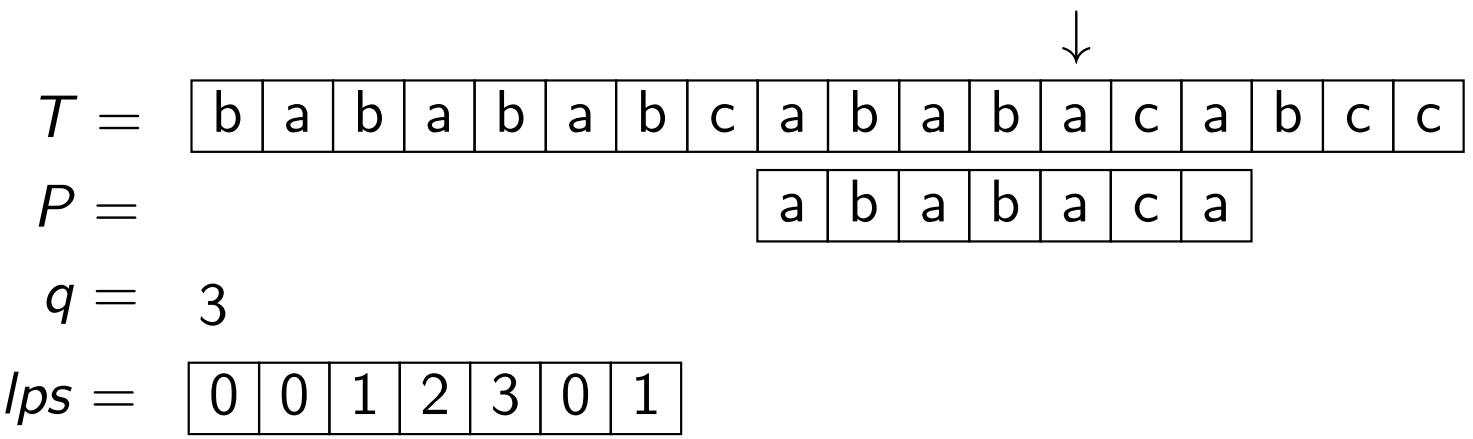
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

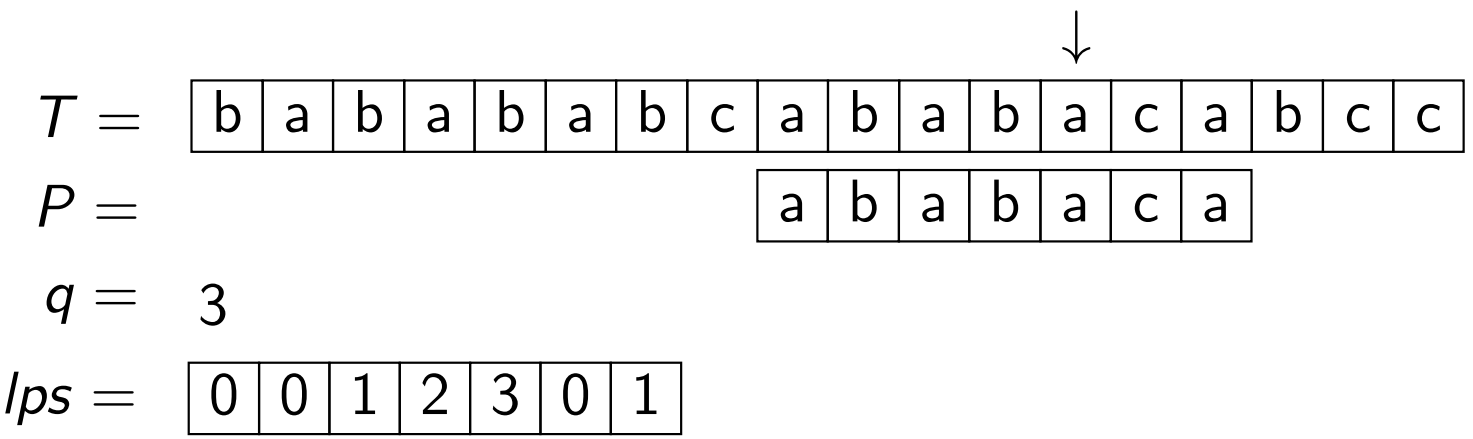
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

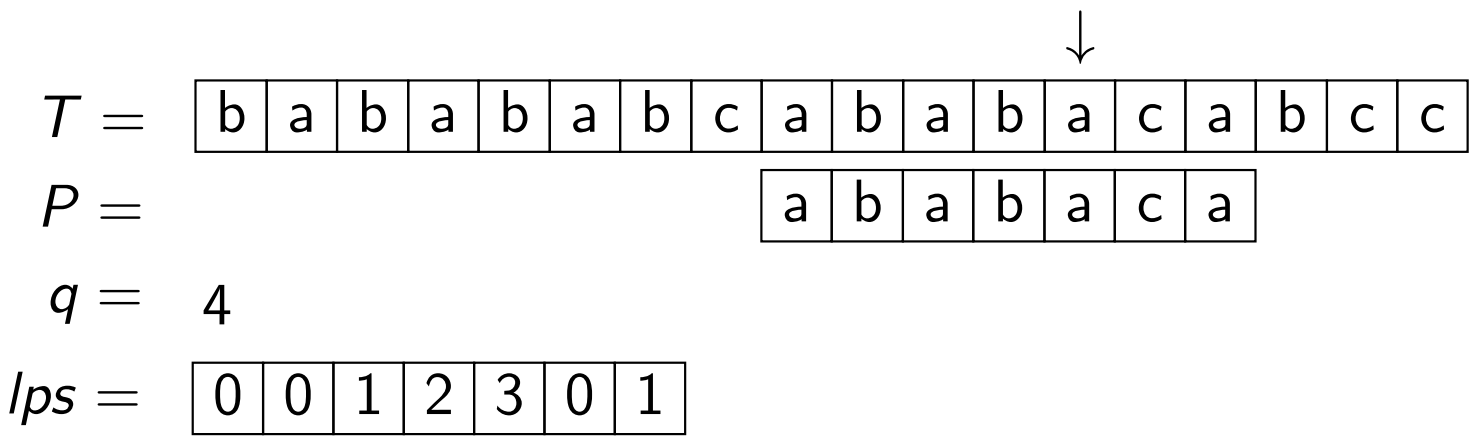
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

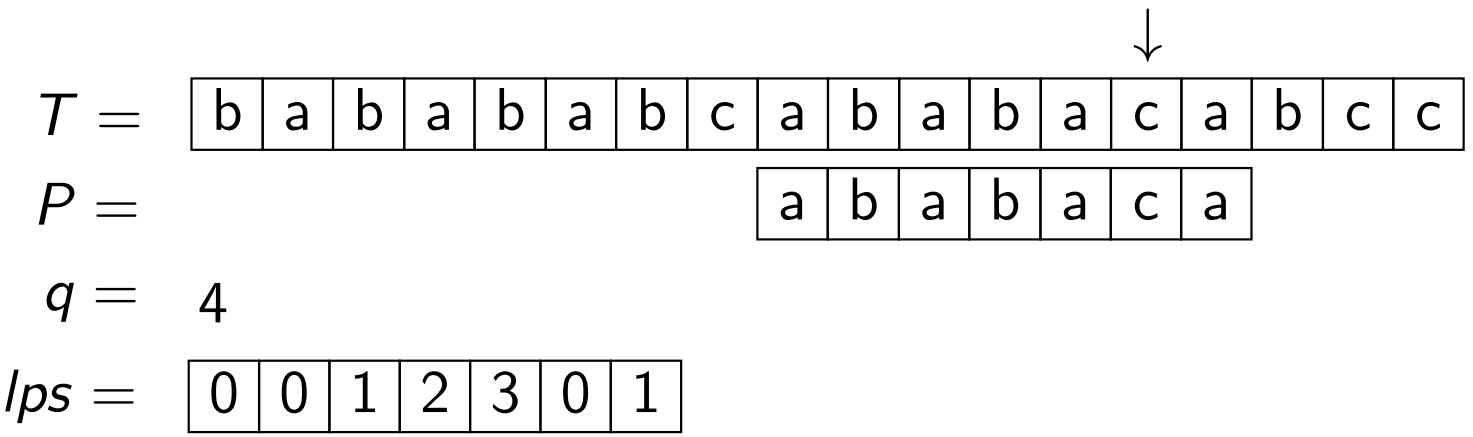
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

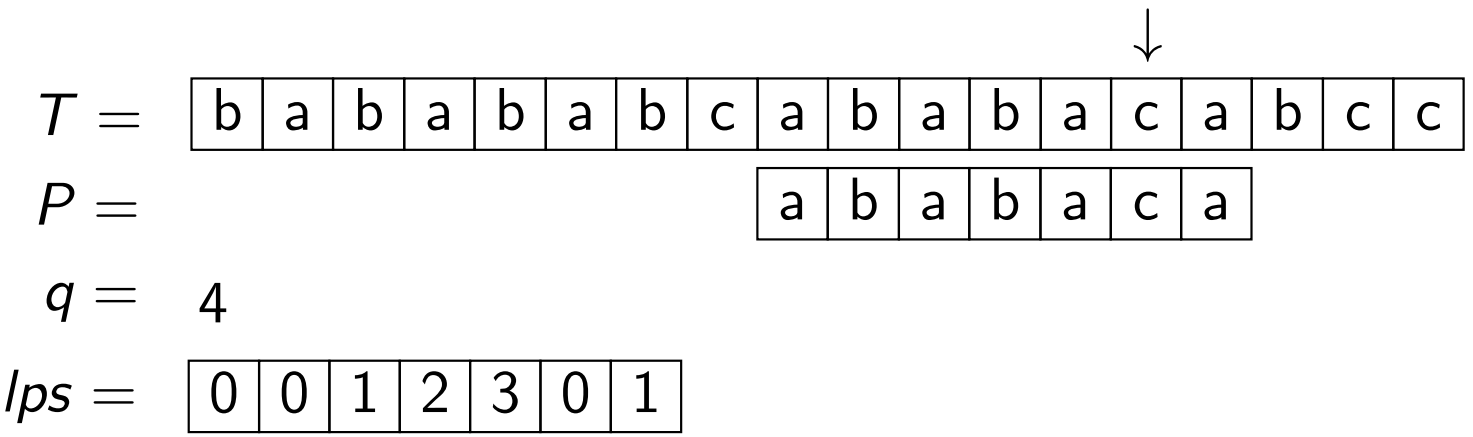
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

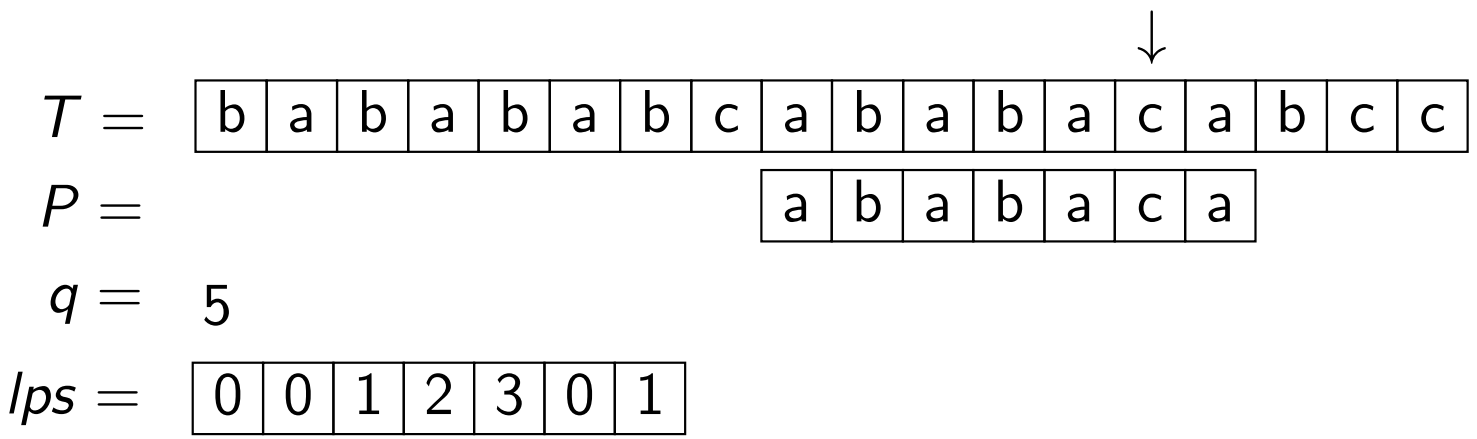
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

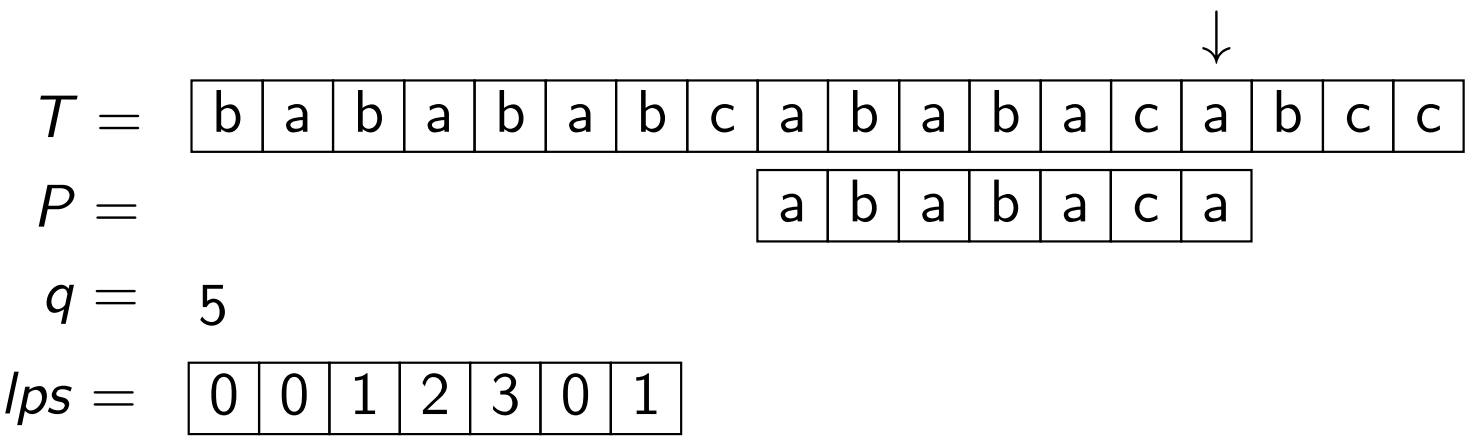
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

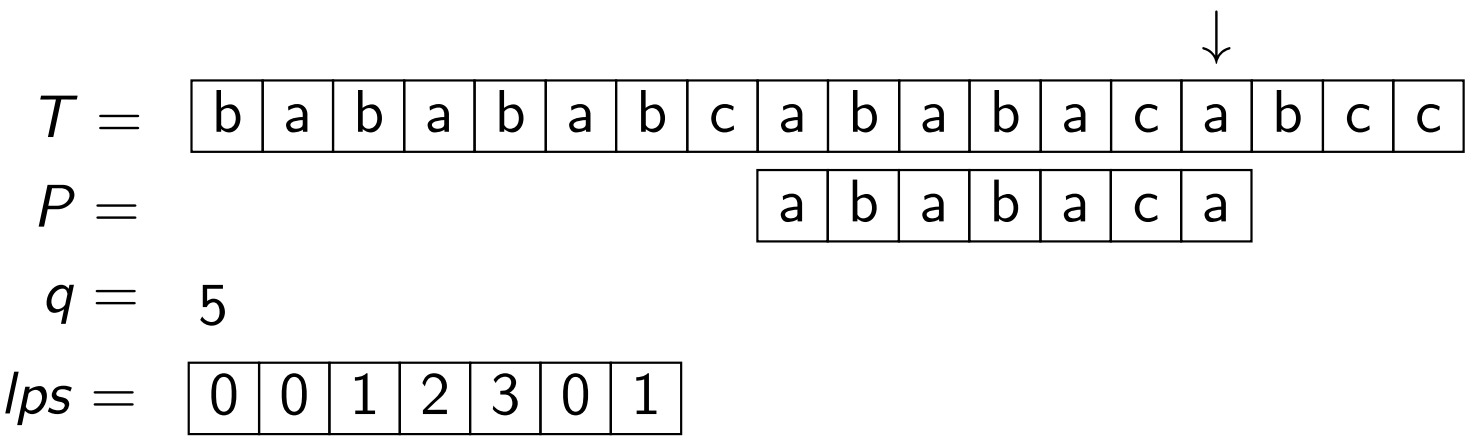
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

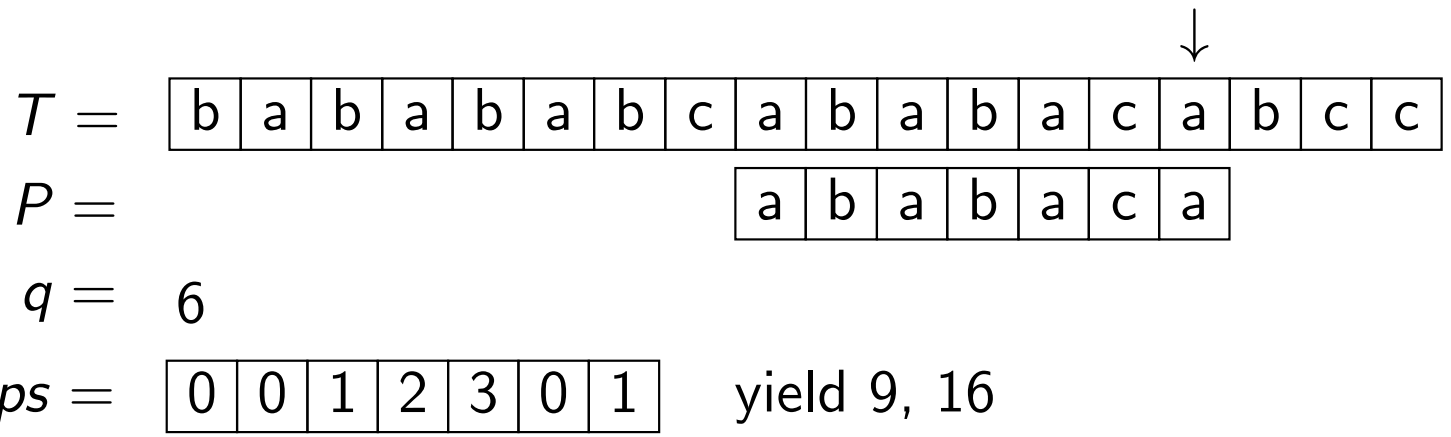
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

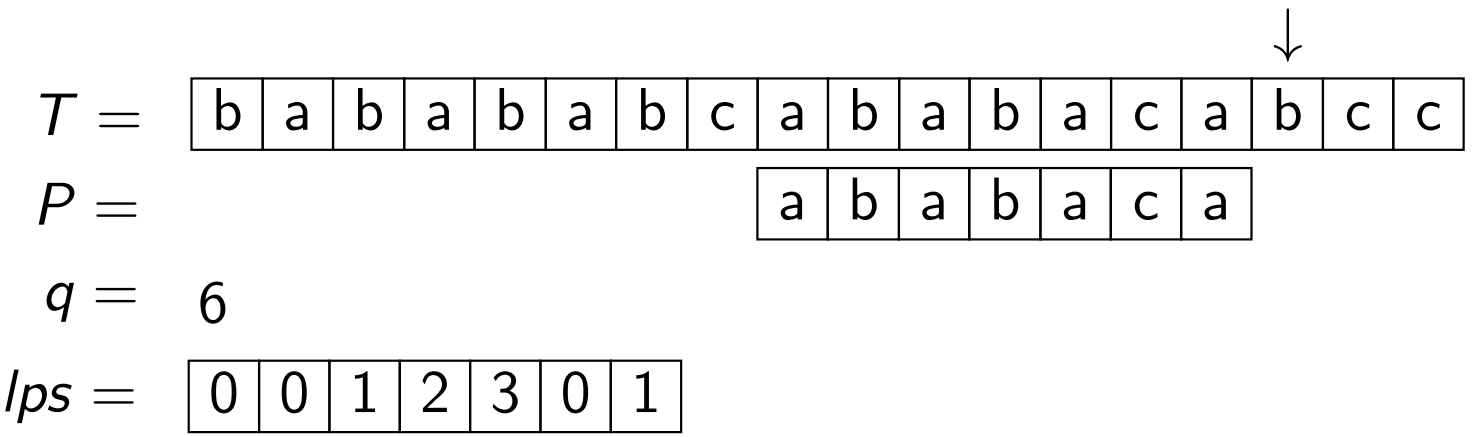
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

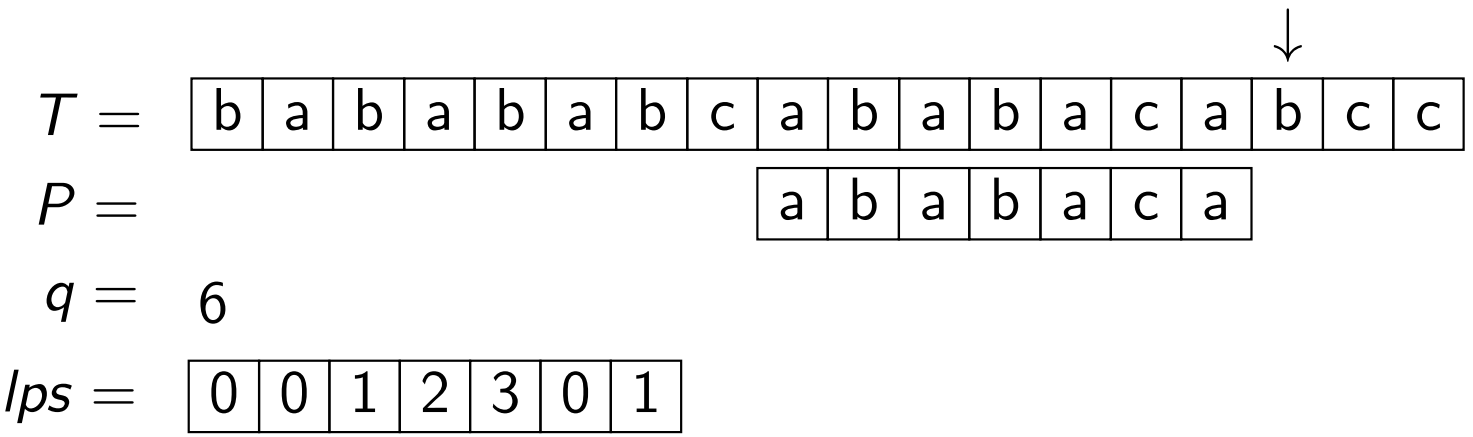
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

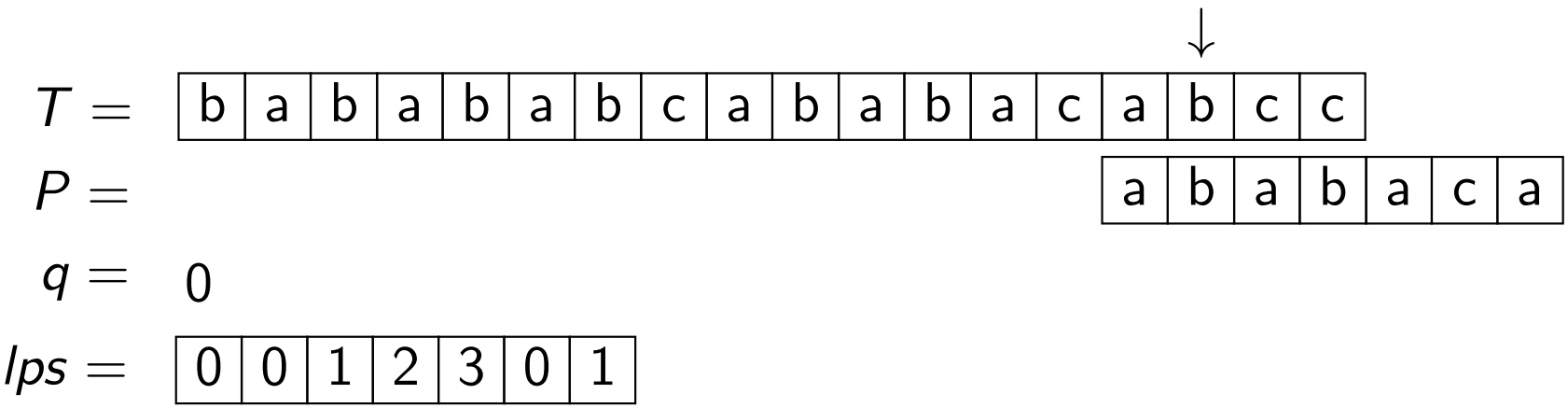
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

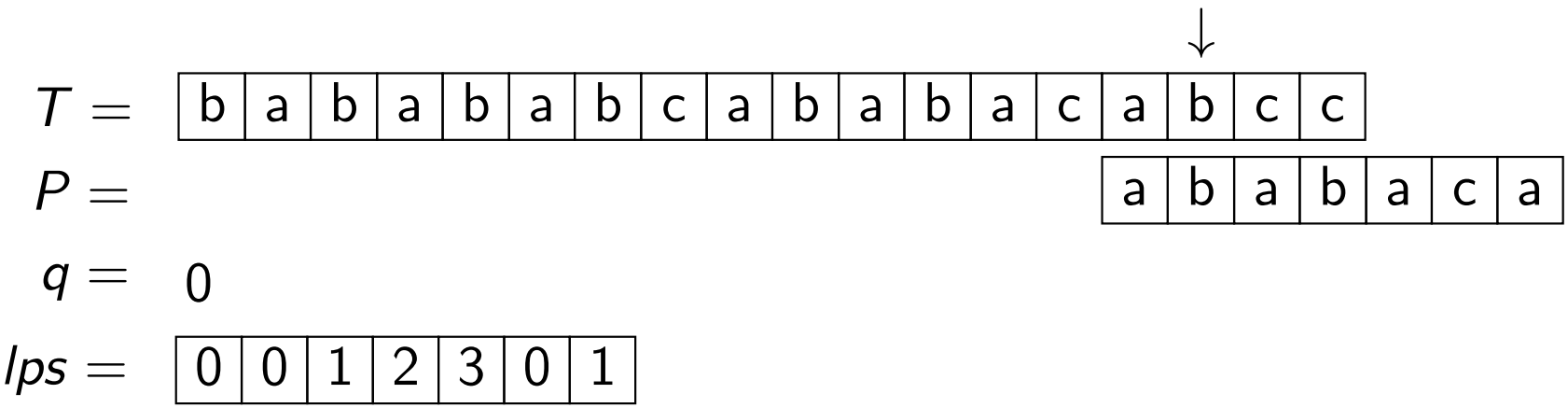
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

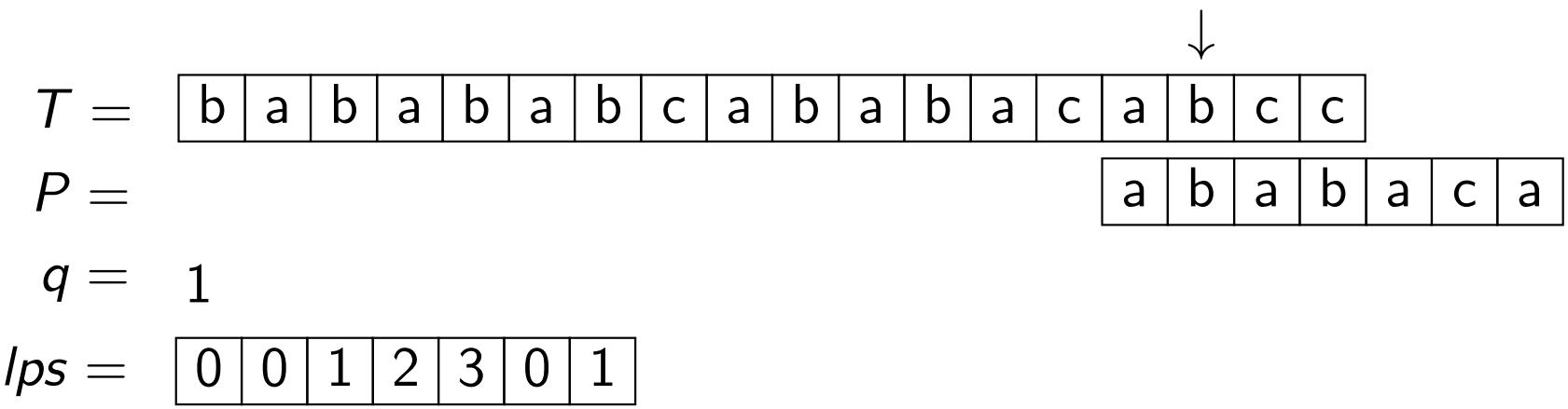
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

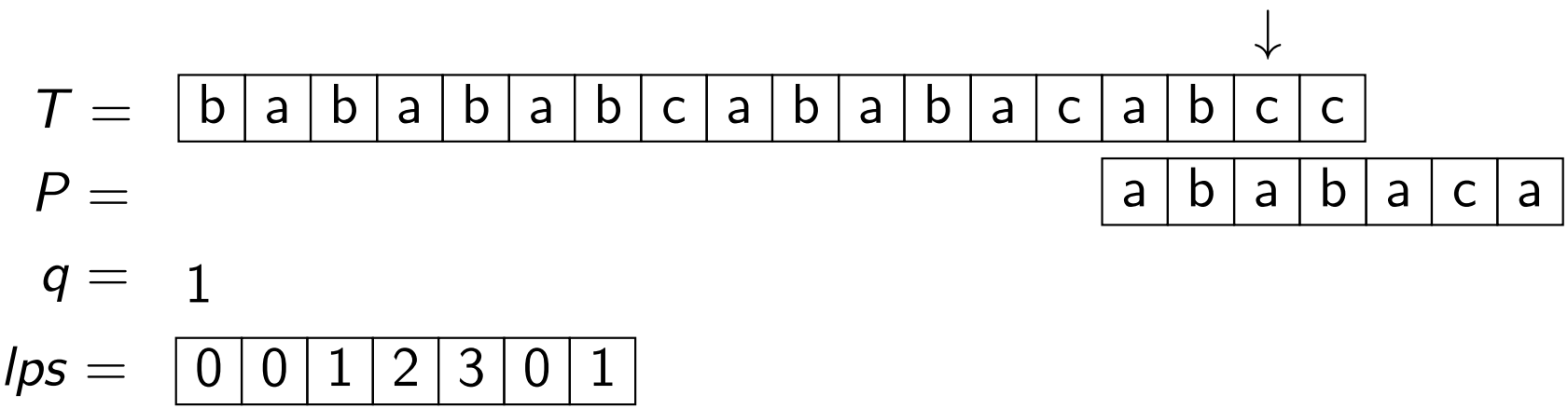
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

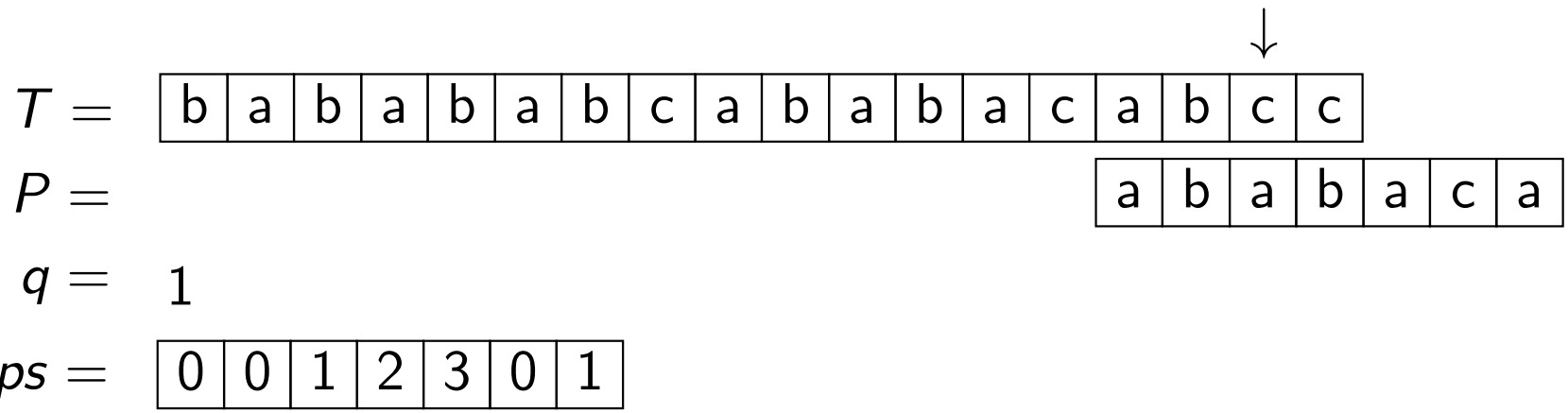
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

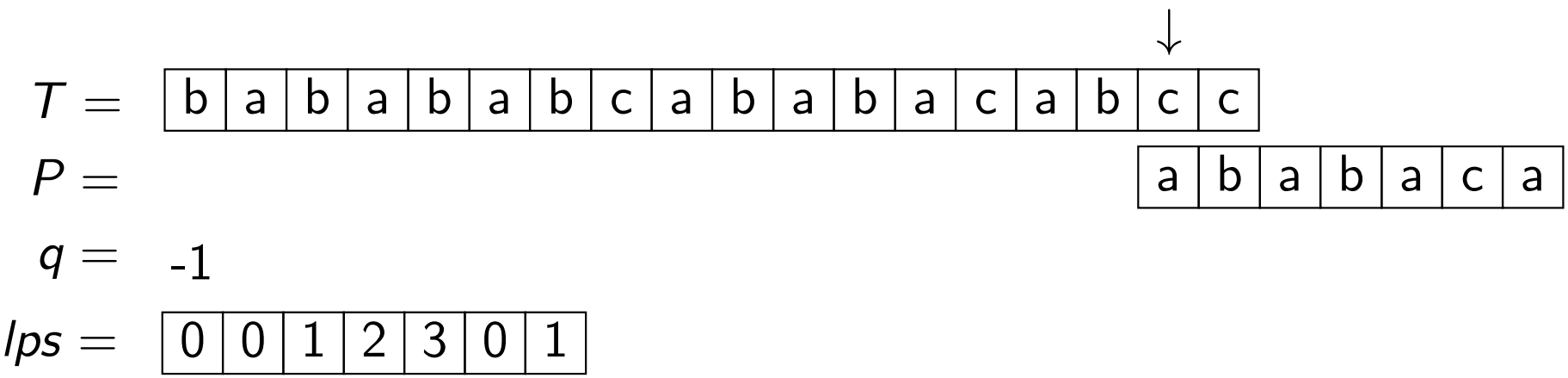
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

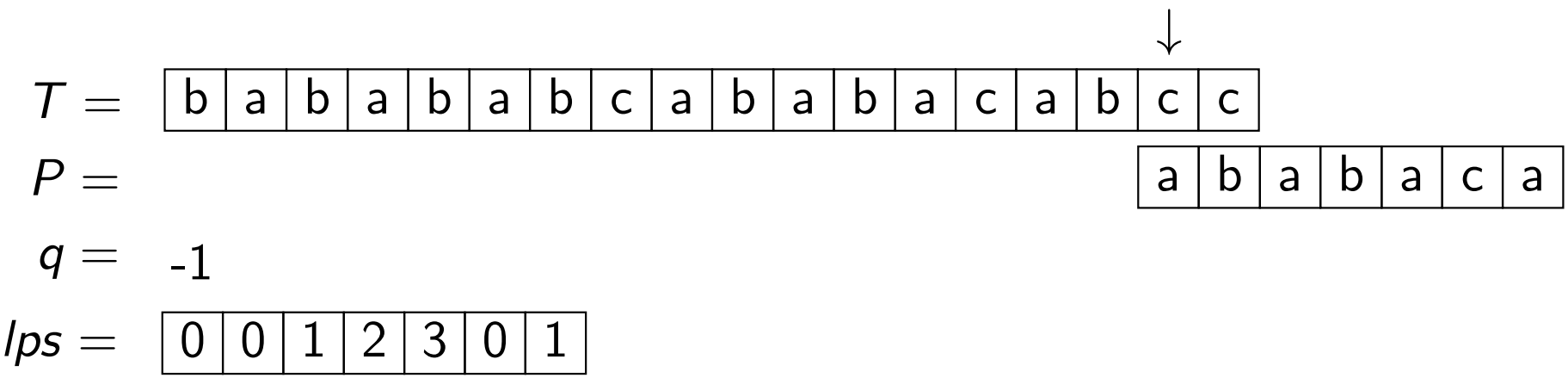
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

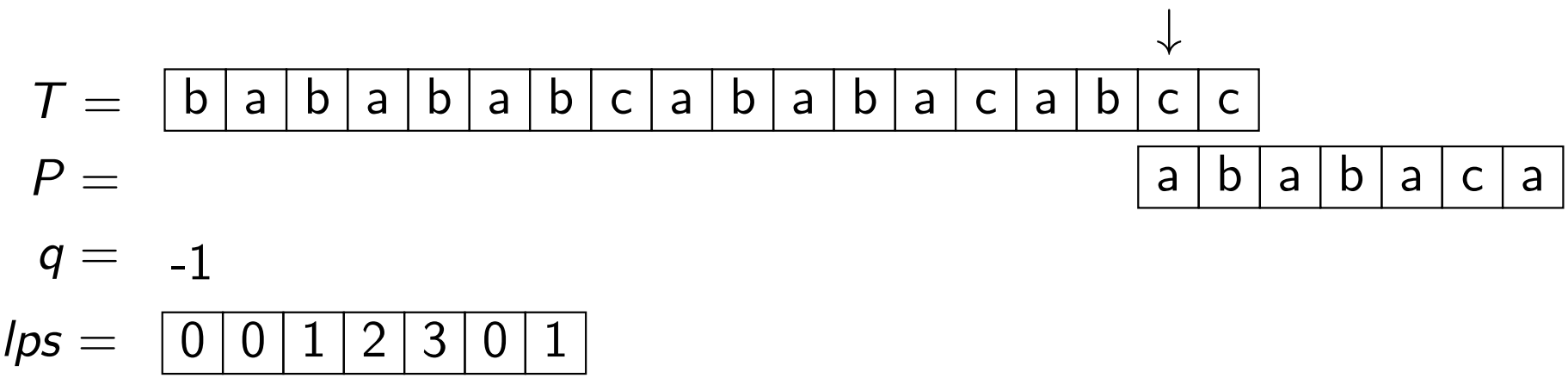
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

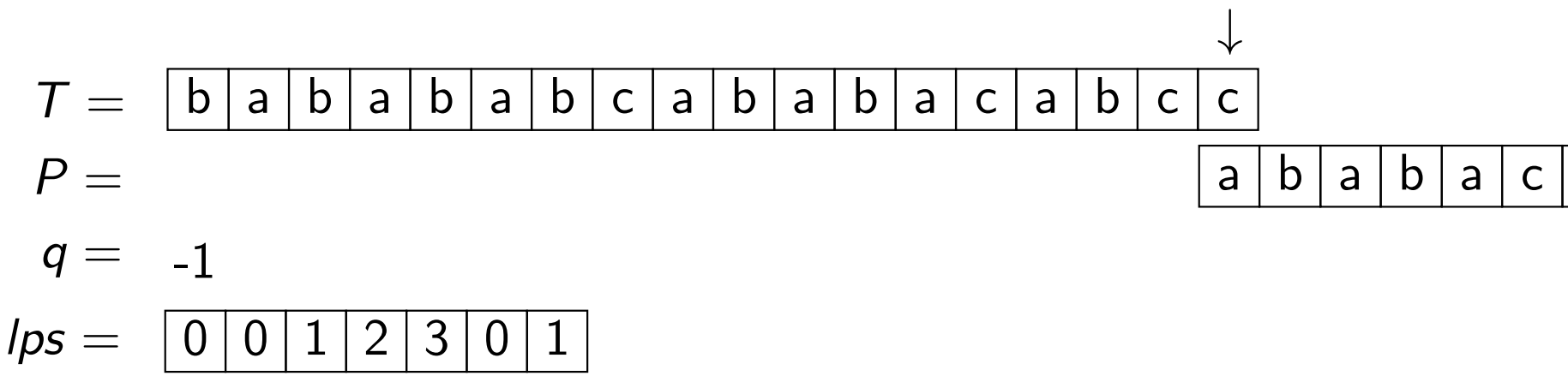
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

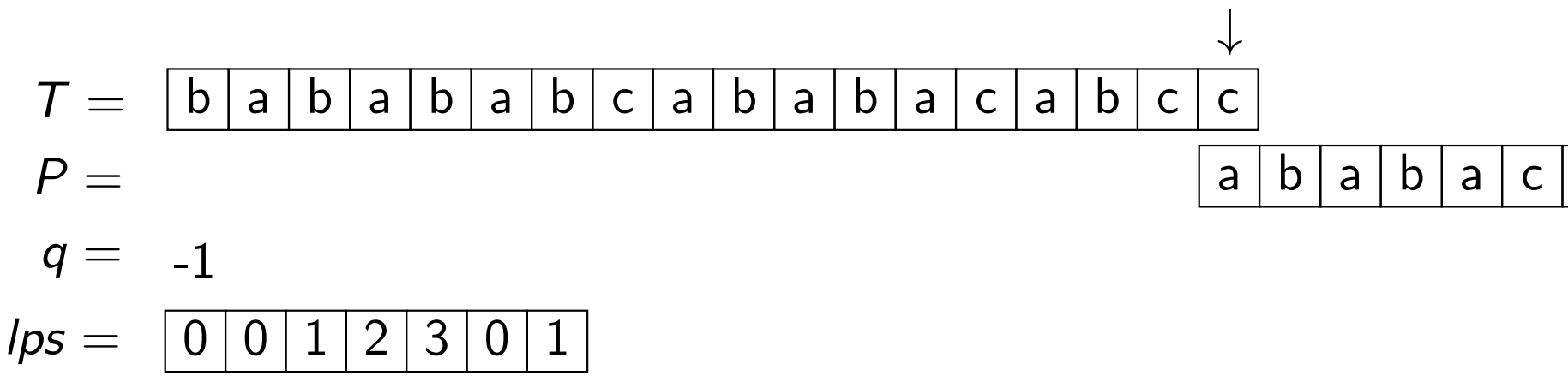
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

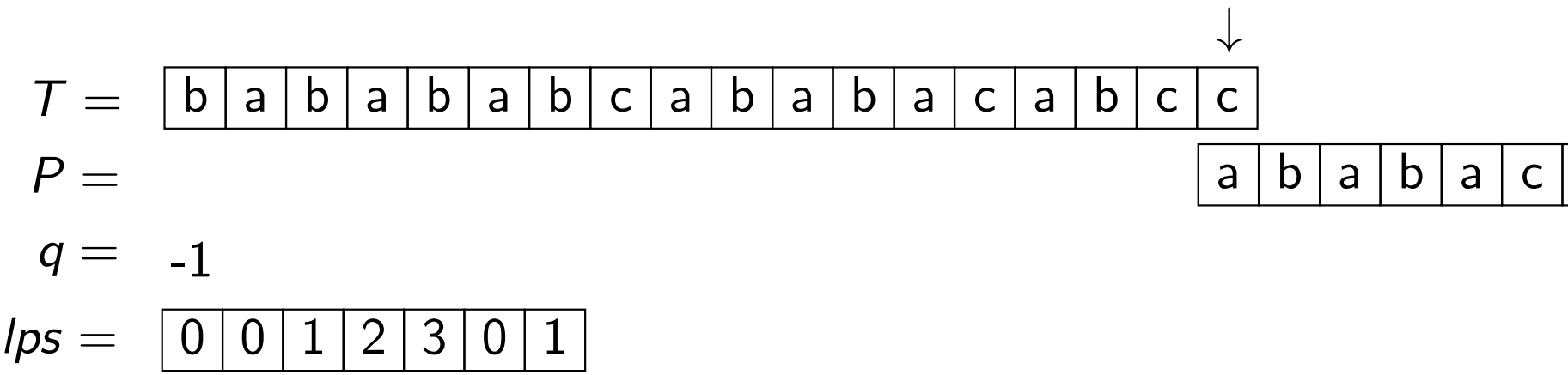
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Beispiel zur Mustersuche mit KMP

Mustersuche mit dem KMP:

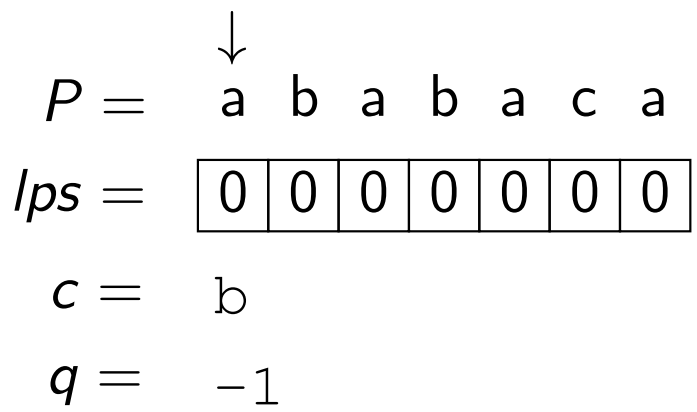
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

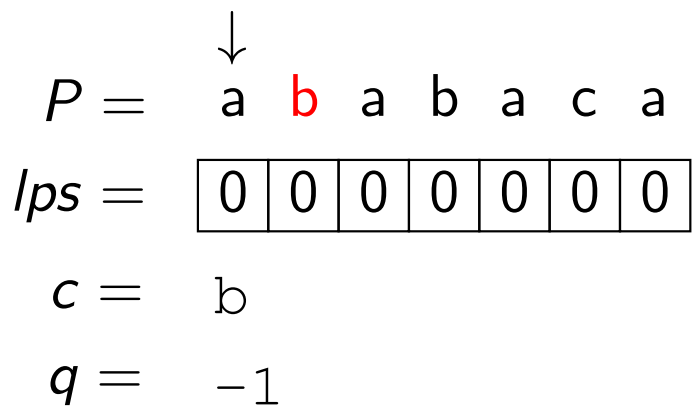
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

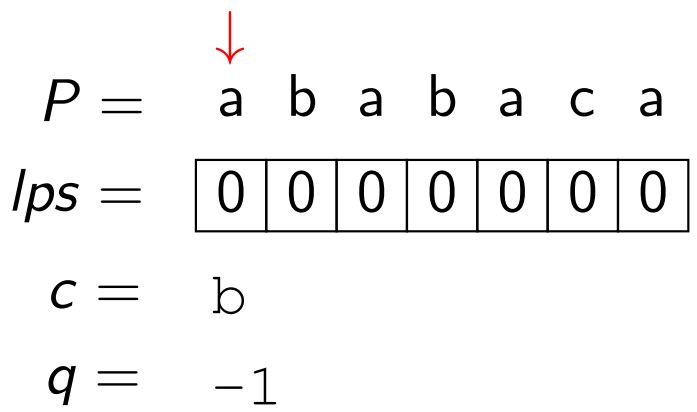
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

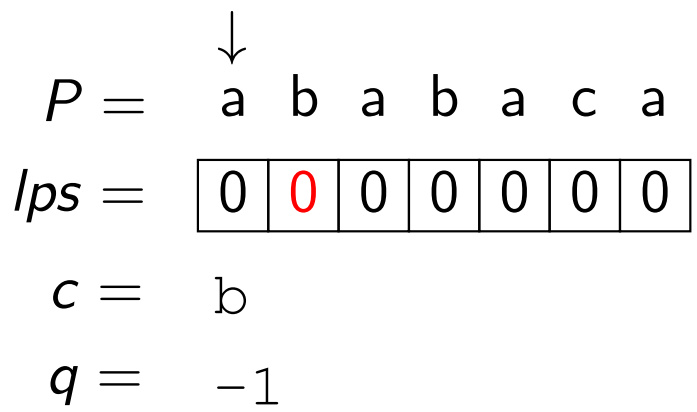
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

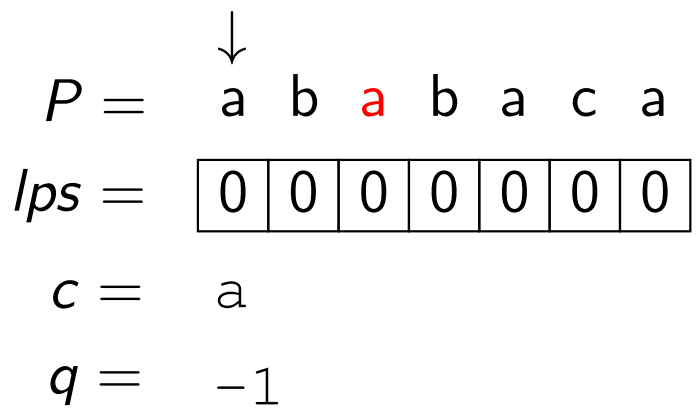
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

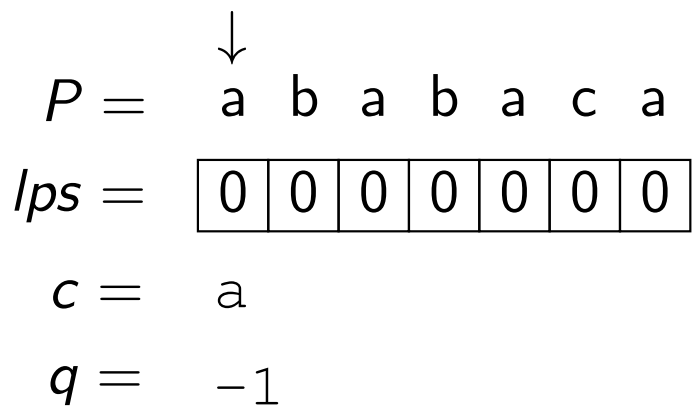
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

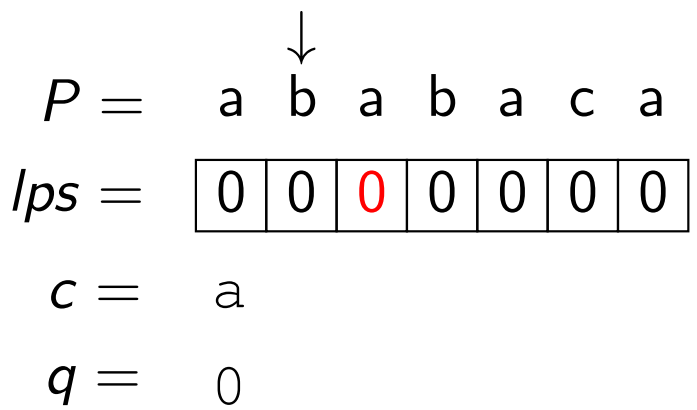
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

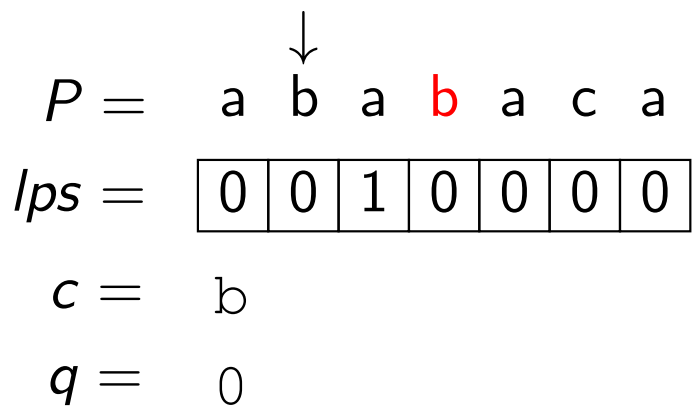
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

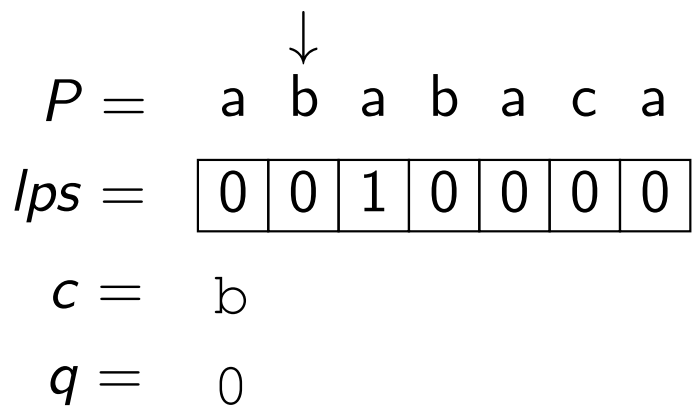
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

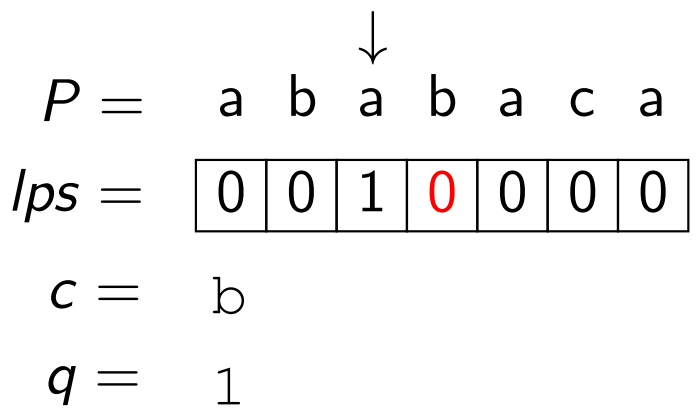
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

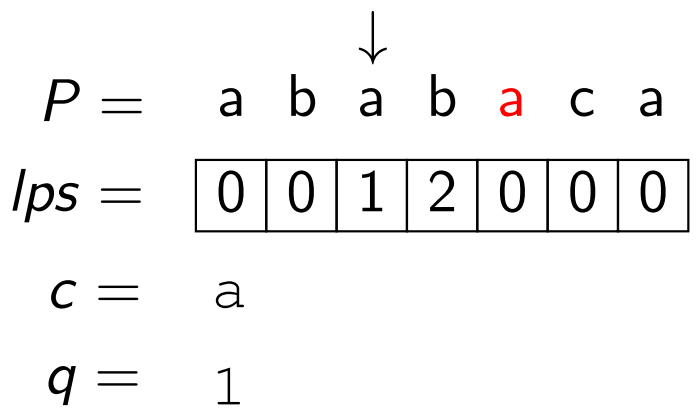
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

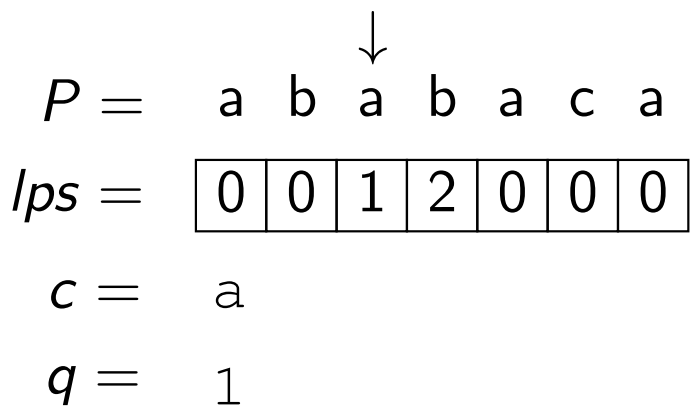
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

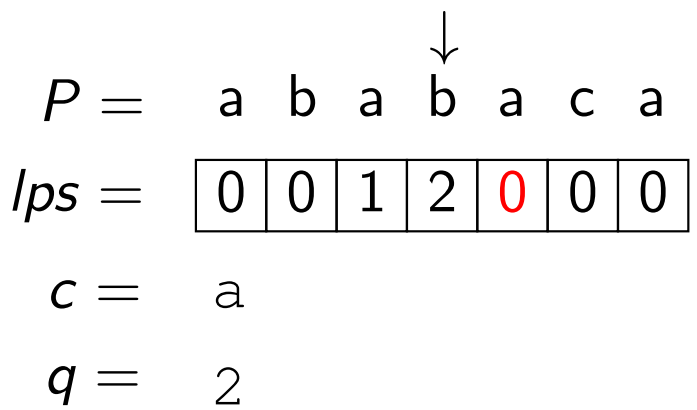
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

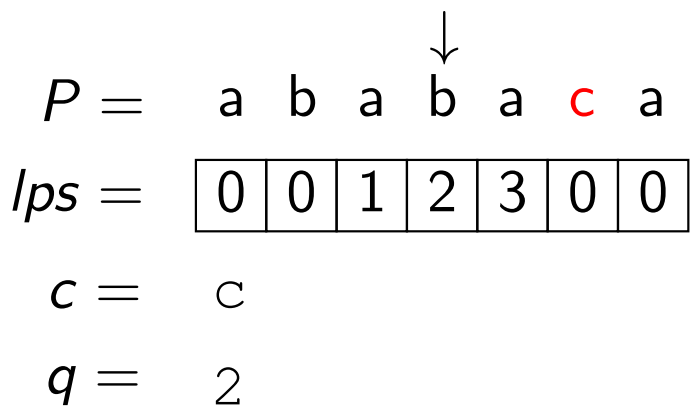
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

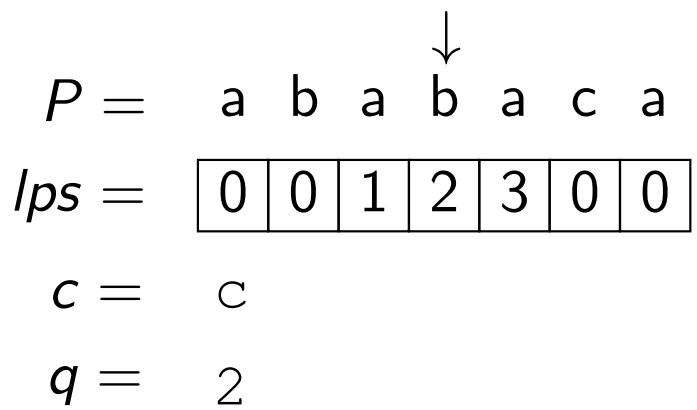
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

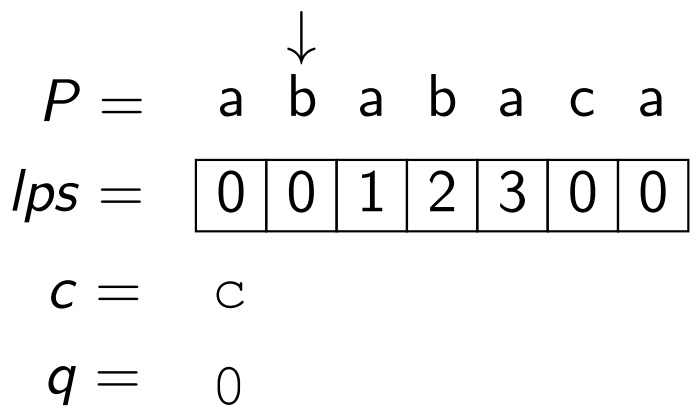
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

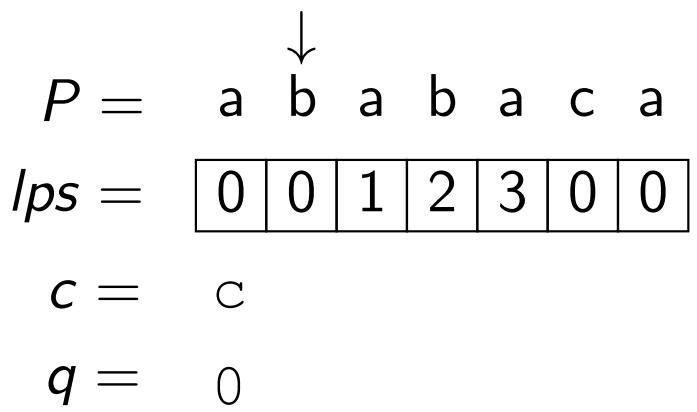
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

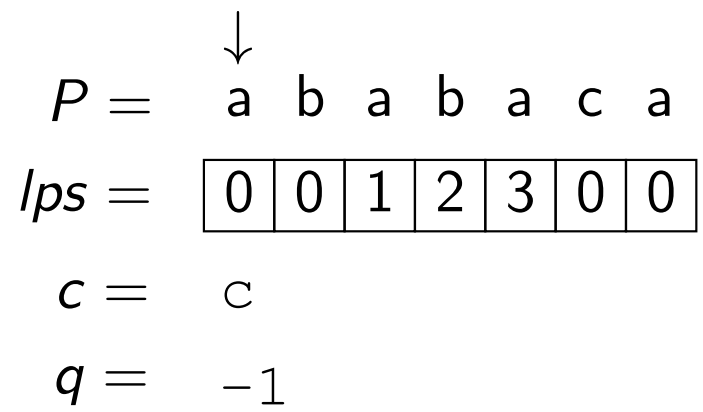
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

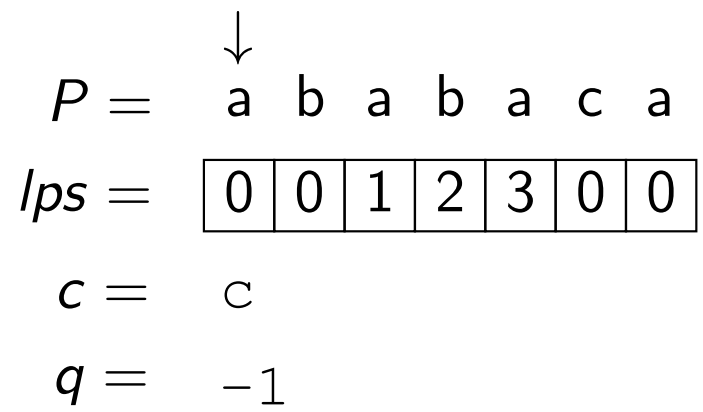
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

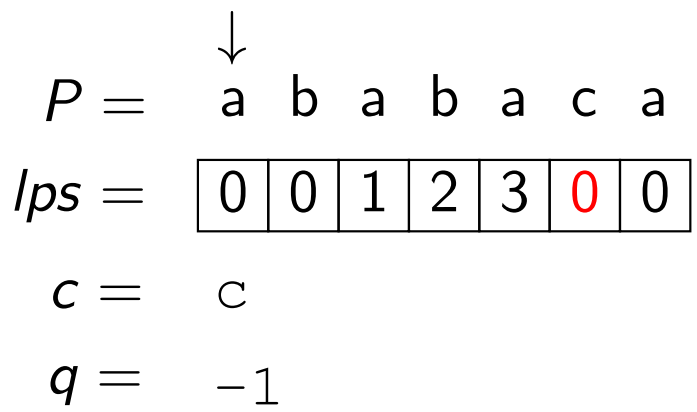
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

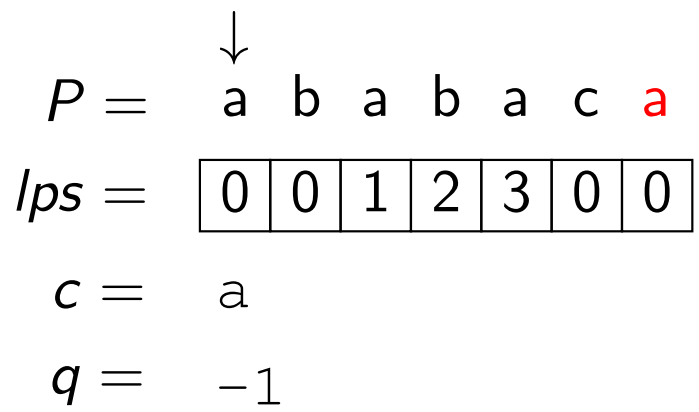
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

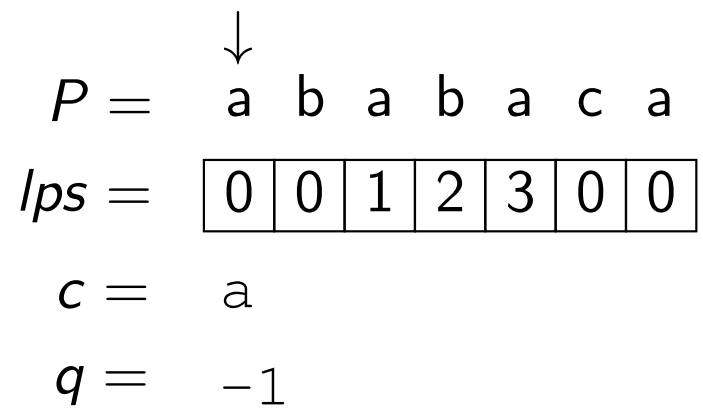
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

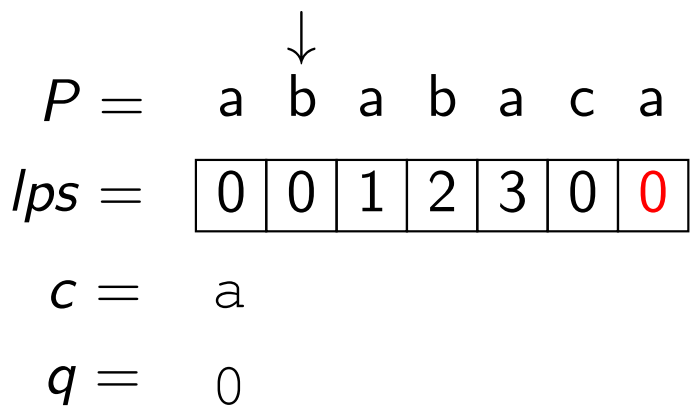
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

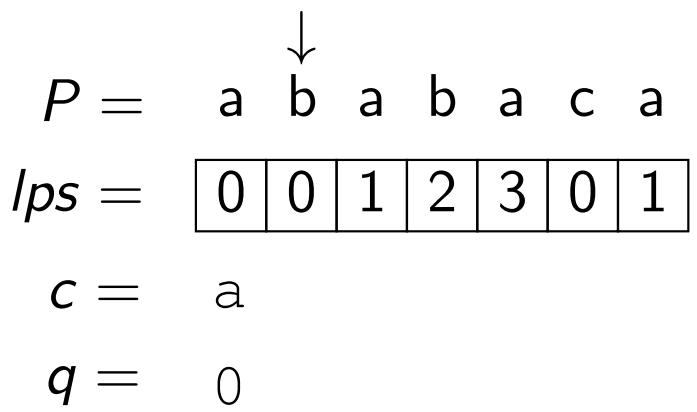
```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```



Effiziente Berechnung der lps-Funktion

Erstellung der lps-Tabelle mit lps selbst:

```
1 def delta(q, c, P, lps):
2     m = len(P)
3     while q == m - 1 or (P[q + 1] != c and q > -1):
4         q = lps[q] - 1
5     if P[q + 1] == c:  q += 1
6     return q
```

Die (amortisierte) Laufzeit beträgt $\mathcal{O}(m)$.

Zusammenfassung DFA + KMP

UA RUHR

- Bei einem DFA wird jedes Textzeichen nur einmal betrachtet.
- Zustandsaktualisierung (δ-Funktion) entspricht Tabellen-Lookup: echtzeitfähig
- Der Knuth-Morris-Pratt-Algorithmus realisiert einen DFA für die exakte Mustersuche durch kompakte Repräsentierung der Übergangsfunktion δ mit Hilfe der lps-Funktion.
- Laufzeiten für KMP durch amortisierte Analyse (nicht echtzeitfähig):
  - Konstruktion: $\mathcal{O}(m)$
  - Suche: $\mathcal{O}(n)$
- KMP ist cache-effizient, da der Text sequenziell gelesen wird.
- Dennoch ist KMP in der Praxis nie der schnellste Algorithmus!
- Interesse vor allem theoretisch und historisch.